THE BOOK WAS DRENCHED

UNIVERSAL
LIBRARY

كتاب البراعة المشرقيه في علم الهندسة الوصفية

تأليف حضرة صابر أفندي صبري
مدرس فرع الوصفيات
بمدرسة المهندسخانه
الخديوية

(الجزء الاول)

يشتمل على ما يجب تدريسه من علم الهندسة الوصفية لتلامذة المدارس التجهيزية قبل دخولهم بالمدارس الخصوصية

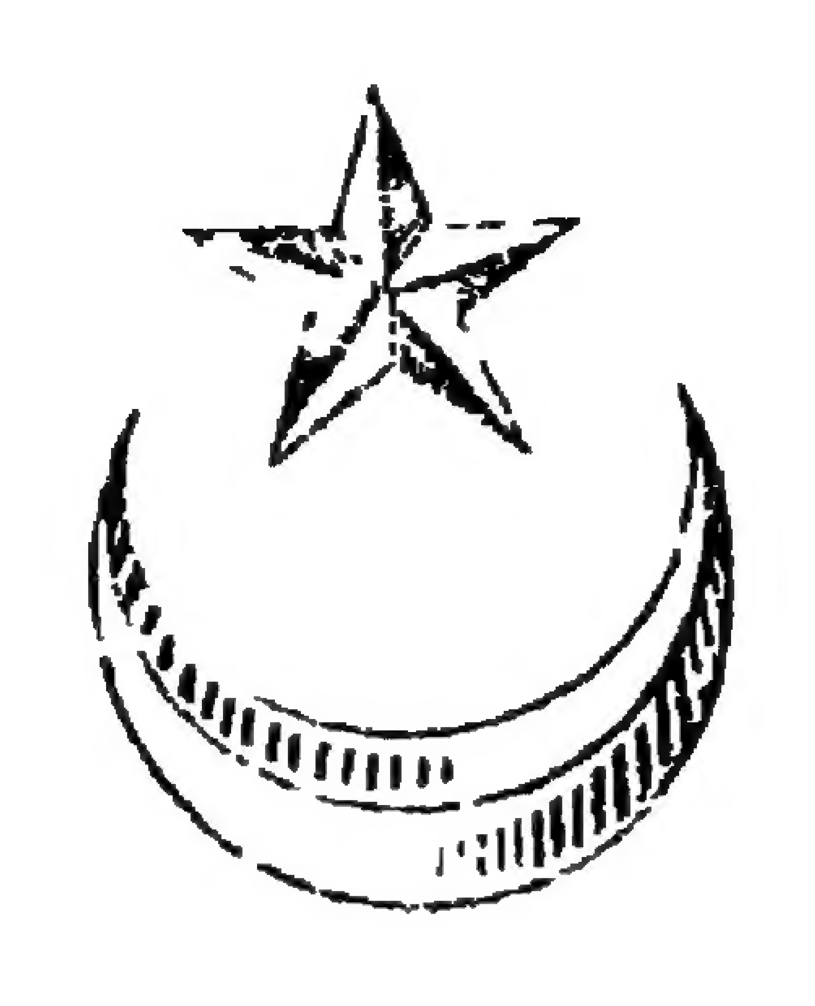
قد قرر مجلس المعارف الاعلا في جلسته المنعقدة بتاريخ ٢٥ ابريل سنة ١٨٨٢ افرنكية لزوم استعمال هذا الكتاب بالمدارس الاميرية المصرية

(الطبعة الاولى)

(بمطبعة ديوان عموم المعارف بدرب الجماميز)

سنة ١٢٩٩ هجرية

(على صاحبها أفضل الصلاة وأزكى التحية)



(بسم الله الرحمن الرحيم)

ان خير ما تصورته الافكار وجرت به اقلام الوصف من جليل الآثار حمد مسقط كرات الغيث على مستويات البقاع وشكر مهيء مواقعها الفسيحة لانواع ما يحب الزراع مدير الكائنات على محور قدرته ومصور اشكال المخلوقات طبق ارادته وحكمته المنزه فى ذاته عن الابعاد المتعالى فى صفاته عن الانداد فسبحانه من اله بسط هذه الكرة فى كل وضع من الاوضاع ورفع السماء بلا عمد أقوم ارتفاع لا اله الا هو لا تدركه الابصار وهو يدرك الابصار وهو اللطيف الخبير والصلاة والسلام على قاطع الطبقات الفراغية راقيا اوج الاكرام الى ان وصل الى مستوى سمع فيه صريف الاقلام محمد الماحى رسوم الضلالة وتماثيل الجهالة وعلى آله المقتفين اثره الكريم السالكين طريقه المستقيم (وبعد) فيقول المتوسل بضوء منائح الرشاد بكوكب محياه الدرى والمعترف بالتقصير عبده صابر صبرى مدرس علم الهندسة الوصفية وفروعه التطبيقية بمدرسة المهندسخانة الخديوية المصرية لما كان لهذا العلم من المقام الاسنى والمنزلة العلياء الحسنا ما حاز به قصب السبق فى ميدان العلوم وارتقى به أوج المنطوق والمفهوم لافتقار الصنائع اليه واحتياج الامور المعمارية للعرض عليه وناهيك به من منبه للاذهان الخامدة ومرطب للقرائح الجامدة توجهت ارادة العالم الجليل والالوذعى الفضيل صاحب المناقب السامية

والهمم

والهمم الآصفية النامية حضرة اسمعيل بك الفلكى ناظر مدرسة المهندسخانة الى ان أجمع كتابا فى هذا الموضوع لينتشر نفعه بين العموم ويضوع فبادرت بتحقيق هذه الآمال الابوية قياما بواجب الخدمة الوطنية وجمعت فيه هذا الكتاب من كل مستملح مستطاب وسميته بالبراعة الشرقية فى الهندسة الوصفية راجيا من واسع الافضال ومحقق الآمال ان ينفع به أبناء الديار المصرية المشمولة بمراحم الحضرة التوفيقية ليكون هذا الفضل منه واليه ويعود حسن التشكر لما أسداه عليه فلقد وجه انظاره لنشر أعلام المعارف واعلاء بنود العوارف حقق الله فى حسن التفاته الآمال واصلح لنا ولاخواننا الاحوال

(الباب الاول)
(فى الخطوط المستقيمة والمستويات)

(الفصل الاول)

فى بيان الغرض الاصلى من علم الهندسة الوصفية وفى طريقة المساقط

بـ ١ د (مبادى أوليه) من المعلوم أن جميع المسائل الرياضية يمكن حلها اما بعمليات رسمية أو بطرق وحسابات جبرية وجنس المسئلة هو الذى يعرفنا أى هاتين الطريقتين أحسن استعمالا لحلها لان حل بعض تلك المسائل بالطريقة الرسمية قد يكون أسهل من حله بالطريقة الجبرية والبعض الآخر بعكس ذلك بمعنى أن حله بالطريقة الجبرية أقرب من الطريقة الرسمية وقد توجد بعض مسائل يستوى فيها استعمال احدى الطريقتين الرسمية والجبرية بدون أولوية

بـ ٢ د فلذا انقسمت العلوم الرياضية الى قسمين متغايرين فى الوضع لكنهما متحدان فى النتيجة والثمرة فالقسم الاول هو فرع الهندسيات على العموم وهو الفرع الذى يبحث فيه عن معرفة الطرق الكافية لحل المسائل الرياضية بواسطة الاعمال الرسمية التى يمكن اجراؤها عليها والثانى هو فرع الجبريات وهو الفرع الذى يبحث فيه عن معرفة الطرق الجبرية والحسابية اللازمة لحل المسائل الرياضية المذكورة أما الفرع الثانى فلا نشتغل به هنا حيث ان مقصودنا هو الاشتغال بالفرع الاول فقط وهو فرع الهندسيات فنقول

بـ ٣ د لا يخفى على كل من درس الهندسة العادية التى هى مبادى فرع الهندسيات أن

طرقهما غير كافية لحل جميع المسائل الرياضية وفى الواقع كذلك لان الهندسة العادية منقسمة بحسب طبيعة الاشكال المتعلقة بها الى قسمين أولهما هو الهندسة المستوية وثانيهما هو الهندسة الفراغية ففى القسم الاول يبحث عن خواص الاشكال الموجودة فى مستو واحد وعن حل المسائل الرياضية الممكن حصر جميع أجزائها فى فرخ من الورق وهذا القسم وان كان غير كاف لحل بعض تلك المسائل أعنى المسائل المستوية لكنه كاف لحل أغلبها وأما القسم الثانى فلكون أن موضوعه الاشكال الفراغية والاجسام التى لا يمكن حصرها فى مستو واحد هو غير كاف لحل المسائل المتعلقة بها حلا حقيقيا

مثلا الهندسة العادية وان دلت على الطريقة النظرية لايجاد البعد الاصغر بين مستقيمين غير موجودين فى مستو واحد لكنها لم توصل الى معرفة حقيقة البعد المذكور ولا الى تعيين وضع المستقيمين المذكورين فى الفراغ بالنسبة لبعضهما

وكذلك قد بينت الهندسة العادية طريقة نظرية لامرار سطح كروى بأربع نقط معلومة فى الفراغ وليست موجودة فى مستو واحد لكنها لم توصل الى معرفة الوضع الحقيقى لمركز هذه الكرة بالنسبة للنقط المعلومة ولا الى معرفة حقيقة نصف قطر هذه الكرة وبالجملة فهى غير كافية لتعيين الكرة المذكورة بالرسم تعيينا حقيقيا

بند ٤ والحاصل ان الهندسة العادية قاصرة على بيان الطرق النظرية اللازم تتبعها فى حل بعض المسائل الرياضية فقط وليست كافية لحل تلك المسائل حلا قطعيا فلذا اضطر الانسان بحسب احتياجاته الضرورية الى البحث عن الطرق الكافية والاعمال الشافية التى بها يمكنه حل المسائل الرياضية التى يعسر عليه حلها بواسطة الهندسة العادية فباجتهاده المستمر فى تتبع أعمال سلفه ووصول ما أوجده المتقدمون عليه من النتائج والبراهين العقلية اليه توصل الى مقصوده فوضع علم الهندسة الوصفية التى بها توصل الى حل جميع المسائل الرياضية المتعلقة بالاجسام أو الاشكال الفراغية

بند ٥ انما سمى بعلم الهندسة الوصفية لانه ليس قاصرا على حل المسائل الرياضية كما تقدم بل ان من أخص منافعه ومزاياه كونه يساعد المهندس على وصف ما يريد وصفه لاقرانه المهندسين من الاجسام التى اخترعها أو التصميمات التى صممها من بيوت وآلات ومبان واشغال علمية أو ما يريد وصفه من ذلك الى أرباب الصنائع كالنجارين والنحاتين والبنائين وعموم أرباب طائفة المعمار وصفا جيدا بحيث يتيسر للصانع انشاء الجسم الموصوف بحسب أبعاده وتفاصيله المطلوبة وهذا الوصف انما يكون برسم تلك

الاشياء

الاشياء لهم بواسطة الطرق الهندسية على فرخ من ورق وابدائها لمن يريد معرفة حقيقة وتفاصيل تلك الاشياء

ويعلم مما تقدم أن علم الهندسة الوصفية هو كلغة مختصرة اخترعها المهندسون لتوصيل أفكار بعضهم لبعض بواسطة الرسم الوصفي لان المهندس ربما يفهم من الرسم في ظرف دقيقة ما لا يفهمه بالوصف المعتاد في ظرف ساعة وأما بالنسبة لارباب الصنائع فان الرسم الوصفي يكون عندهم كترجمان ماهر يفسر لهم اغراض المهندس وسر أفكاره التي أودعها في الرسم

بند ٦ فاستبان حينئذ من جميع ما ذكر أن الغرض الاصلي من علم الهندسة الوصفية أمران الاول رسم الاجسام ذوات الثلاثة ابعاد على فرخ من ورق ذي بعدين والثاني معرفة الطرق الرسمية اللازمة لحل جميع المسائل الرياضية المتعلقة بالاشكال الفراغية وغيرها

وقد يظهر للطالب في أول الامر أن في الحصول على هذين الامرين صعوبتين الاولى كون الاجسام على العموم ذات ثلاثة أبعاد وكيف يمكن حصرها بالرسم في فرخ من ورق ذي بعدين فقط والثانية هي انه ينبغي في الهندسة الوصفية رسم الاشياء على حقيقتها وبحسب الاوضاع الشاغلة لها حتى ان النتائج التي تحصل بعد حل المسائل تكون مبينة بحقيقتها أيضا بغاية الضبط والدقة ولا شك انه يتوهم في ذلك صعوبة أيضا لكن قد زالت الصعوبات وصار الحصول على الغرض المطلوب بواسطة استعمال طريقة المساقط وهي التي سنشرح لك أصولها فنقول

بند ٧ طريقة المساقط (شكل ١ لوحه ١) اذا أنزل من نقطة موضوعة في الفراغ كنقطة ا عمود كالعمود ا اَ على مستو ثابت كالمستوى ع ض غ سميت نقطة اَ التي هي موقع هذا العمود على المستوى الثابت مسقط نقطة ا على المستوى المذكور وأيضا اذا أنزل من جميع نقط المستقيم ا ب ء . . . . . أعمدة سمي الخط الجامع للنقط اَ و بَ و ءَ و . . . . . مسقط مستقيم ا ب ء على المستوى الثابت ويلزم أن يكون هذا المسقط بالضرورة مستقيما لانه حيث كانت جميع هذه الاعمدة موجودة في المستوى المار بأحدها وهو ا اَ وبالمستقيم اء يلزم أن يكون المسقط اَ بَ ءَ كناية عن خط تقاطع المستوى اَ ا ء الذي يسمى المستوى المسقط مع المستوى ع ض غ الذي يسمى مستوى المسقط

بند على العموم مسقط أى منحن مثل م ه ط هو الخط الجامع لمواقع الاعمدة م مَ
و ه هَ , ط طَ , ... المنزلة من نقطه المختلفة على المستوى الثابت وفى العادة
يكون هذا المسقط مَ هَ طَ .... خطا انحناؤه مخالف لانحناء المنحنى المعلوم فى
الفراغ وأيضا يتكون من مجموع هذه الاعمدة سطح اسطوانى يسمى بالاسطوانة
المسقطة للمنحنى م ه ط

بند ٩ وحينئذ يمكن أن يقال ان كلا من النقطة أو المستقيم أو المنحنى الفراغى يصير
معين الوضع بالكلية متى علم مسقطا كل منها على مستويين ثابتين وضعهما معلوم وليسا
متوازيين لانه فى الواقع اذا فرض أن ىه ض غ , ض غ ر مستويان بهذه الصفة
وفرض أن اَ و اً هما المسقطان المعلومان لنقطة فراغية حيثما اتفق فاذا أقيم من
نقطه اَ عمود غير محدود مثل اَ ا على المستوى ىه ض غ لزم أن يكون هذا العمود
مارا بالنقطة المطلوبة وكذا يلزم أن تكون النقطة المذكورة موجودة على العمود اً ا
المقام من نقطة اً على المستوى ض غ ر وحيث ان تلك النقطة لا يمكن أن تشغل
فى الفراغ سوى وضع واحد يلزم أن تكون موجودة فى نقطة تقابل هذين العمودين
ببعضهما

وفى الحقيقة اذا لم يتقابل المستقيم اً ا مع المستقيم اَ ا فلا يوجد فى الفراغ نقطة يكون
مسقطاها اَ , اً ولاشك ان هذا يدل على انه لا يصح اتخاذ مسقطى النقطة بكيفية
اختيارية بالكلية وأنه يوجد بينهما علاقة سنذكرها فيما يأتى (بند ١٧)

بند (شكل ١ لوحه ١) فاذا فرض الآن أن اَ ءَ , اً ءً مسقطا مستقيم مجهول
على المستويين الثابتين ىه ض غ , ض غ ر وتصورنا مستويا كالمستوى ءَ اَ ا
غير محدود الامتداد مارا بالمسقط الاول وعموديا على المستوى ىه ض غ فان هذا
المستوى يلزم أن يكون مشتملا على المستقيم المطلوب وأيضا يكون موجودا فى المستوى
ءً اً ا المار بالمسقط الثانى ءً اً والعمودى على ض غ ر وحينئذ يكون الخط المجهول
موجودا بالضرورة فى محل تقاطع هذين المستويين الذى هو مستقيم واحد معين انما
توجد حالة واحدة لا يمكن فيها تعيين المستقيم الفراغى بواسطة مسقطيه وهى الحالة التى

نقصد

يتحدفيها المستويان المسقطان ءَ أ ا ، ءً أ ا ويصيران مستويا واحدا ولاشك ان ذلك لايحصل الااذا كان المستوى المار بكل من المستقيم الفراغي ومسقطيه عموديا بالضبط على الفاصل المشترك بين المستويين الثابتين الذى هو غ ض وحينئذ فمثل هذين المسقطين لايكون كافيا لتحديد المستقيم المطلوب بل يلزم طلب مسقط ثالث على مستو ثابت آخر غيره موازللفاصل المشترك بين المستويين الاولين

بـ ١١ـد وبالجملة اذا علم المسقطان مَ ه طَ ، مً هً طً لمنحن مجهول يتصور اسطوانة عمودية على المستوى ه ض غ مارة بالمسقط الاول واسطوانة أخرى عمودية على المستوى ض غ م مارة بالمسقط الثانى فمن حيث ان المنحنى المطلوب يلزم أن يكون موجودا بالطبيعة على كل من هذين السطحين الاسطوانيين فيكون هو خط تقاطعهما م ه ط الذى يجوز أن يكون منحنيا شماليا أى مضاعف الانحناء بمعنى ان نقطه ليست موجودة كلها فى مستو واحد

بـ ١٢ـد لكن معلوم بناء على ماذكرناه من الآن فصاعدا ان تعين النقط والخطوط فى الرسم بواسطة مسقطى كل منها بحيث متى قلنا ان النقطة الفلانية او الخط الفلانى معلوم يلزم ان يفهم من ذلك أن مسقطى تلك النقطة أو مسقطى ذلك الخط هما المعلومان فقط وأما السطوح فنذكر فيما سيأتى بـ ١٤ـد مايلزم تقريره من الاعتبارات التى على مقتضاها يجب بيان السطوح بالرسم على مستويى المسقط

بـ ١٣ـد قد فرضنا الآن أن خطوط الاسقاط مستقيمات عمودية على المستوى الثابت لكن يلزمنا أن ننبه هنا على أنه يجوز أحيانا اتخاذ المستقيمات المسقطة مائلة على المستوى المذكور وموازية لاتجاه معلوم وتكون النتائج المتحصلة بهذه الطريقة هى عين النتائج التى وجدت فى حالة ما تكون المستقيمات المسقطة عمودية على المستوى الثابت لكن يمنعنا عن استعمال طريقة الاسقاط المائل جملة موانع صعبة منها ان طريقة الاسقاط المذكورة تكون على العموم أصعب فى العمل من الطريقة الاولى ومنها ان النتائج التى تتحصل بواسطتها تكون أقل ضبطا مما يتحصل بطريقة الاسقاط العمودى لان المستقيمين المتقاطعين على زاوية حادة تكون بالبداهة نقطة تقاطعهما أقل وضوحا وتحديدا من نقطة تقاطع المستقيمين المذكورين فى حالة ما اذا كانا متقاطعين على زاوية قائمة

بند ١٤ بناء على هذه الاسباب يكون معلوما من الآن فصاعدا أن المعتبر عندنا دائما هو المساقط العمودية ما لم ننبه على عكس ذلك اذا لزم الحال تنبيها خصوصيا وأيضا قد جرت العادة بسبب موانع كالموانع المتقدمة بأن ينتخب المستويان الثابتان أعني مستويي المسقط ع ض خ , ض خ ر متعامدين على بعضهما ثم انه لاجل سهولة تصورهما يفرض في الغالب ان أحدهما أفقي والآخر رأسي ويسمى خط تقاطعهما خ ض الذي هو مستقيمهما خط الارض

بند ١٥ يشاهد حينئذ مما تقدم ان طريقة الاسقاط السابقة كافية لتبيين معالم أي مسئلة بالرسم تبيينا تاما فالباقي علينا حينئذ هو تنويع هذه الطريقة فقط بحيث يمكن اجراء جميع العمليات على مستو واحد كما هو الغرض الاصلي من علم الهندسة الوصفية اذ بدون ذلك تكون طريقة الاسقاط المتقدمة صعبة جدا ان لم نقل مستحيلة لانها تكون حينئذ داعية لان يكون الرسيم حاملا معه دائما لوحين متعامدين على بعضهما من الخشب أو غيره ليأخذ عليهما مساقط الاشياء التي تصادفه في اثناء عمله ولا يخفى ما في ذلك من الصعوبة

(تحويل مستويي المسقط الى مستو واحد)

بند ١٦ لاجل الوصول الى هذا الغرض أعني لاجل تحويل جميع العمليات الى مستو واحد وهو سطح الفرخ الورق نتصور بعد ان نسقط النقط والخطوط المعلومة على المستويين ع ض خ , ض خ ر المتعامدين على بعضهما أن المستوى الاخير الذي هو الرأسي قد دار حول خط الارض ض خ حتى انطبق على المستوى الافقي لاجل ان لا يتكون عنهما سوى مستو واحد مثل ع ر وهو الذي يرسم عليه في الحقيقة جميع العمليات التي كان ينبغي اعمالها على المستويين الاصليين لكن ينبغي ان يلاحظ دائما أن هذا التطبيق لم يستعمل الا لتسهيل اجراء العمل فقط بحيث متى لزم الحال لتصور أي عملية كانت باعتبارات هندسية ينبغي ان يتصور عقلا أن المستوى الرأسي رجع عن الانطباق الى وضعه الاصلي أي صار عموديا على المستوى الافقي

بند ١٧ (شكل ١ لوحه ١) بعد تطبيق المستويين الثابتين على بعضهما يرى انه يوجد بين مسقطي النقطة الواحدة من الفراغ علاقة أي ارتباط مهم ينبغي ملاحظته لانه حيث كان أحد المستقيمين آ ا , آ ا الساقطين لنقطة ا الفراغية في نقطة آ

وفى نقطة اً عموديا على المستوى الافقى والآخر عموديا على المستوى الرأسى ينبغى بناه على ذلك أن يكون المستوى اَ ا اً المار بهذين المستقيمين عموديا على مستويى المسقط فى آن واحد وحينئذ يكون عموديا على فاصلهما المشترك ض غ واذن فالمستوى اَ ا اً يقطع المستويين المذكورين فى مستقيمين مثل اَف و اًف عموديين على ض غ ومتلاقيين فى نقطة واحدة مثل نقطة ف على خط الارض المذكور

اذا تقرر هذا يقال حينما يدور المستوى الرأسى ض غ ر حول ض غ يجذب معه المستقيم اًف الذى لا يزال فى أثناء الحركة عموديا على محور الدوران ض غ وبناء على ذلك يوجد من بعد انطباق المستوى الرأسى على المستوى الافقى ان المستقيم فاً قد أخذ وضعا مثل ف اً هو بالضرورة امتداد المستقيم ف اَ وعلى هذا يعلم أن المسقطين اَ و اً لنقطة فراغية واحدة يوجدان دائما على مستقيم واحد عمودى على خط الارض ض غ وذلك من بعد انطباق مستويى المسقط على بعضهما بحيث اذا أخذ أحد هذين المسقطين وهو اَ مثلا بالاختيار لزم أن يقام المستقيم اَف الغير محدود عموديا على ض غ ويوضع بعد ذلك المسقط الثانى وهو اً فى أى نقطة من امتداد العمود اَف

بند ٨ أما من خصوص المستقيم اى فاننا اذا طبقنا نقطته الثانية ىً فى ىً صار مسقطه الرأسى اً ىً منطبقا على اً ىً لكن لا يكون بين هذا الانطباق و بين المسقط الافقى اَ ىَ أدنى ارتباط ضرورى بحيث يمكن اعتبار أى خطين مثل اَ ىَ و اً ىً مرسومين بالاختيار كمسقطين لمستقيم واحد فراغى ماعدا الحالة الخصوصية التى يكون فيها المسقط اَ ىَ عموديا على خط الارض ض غ لان المسقط الرأسى له يلزم ان يكون فى هذه الحالة كناية عن امتداد المسقط اَ ىَ لكننا نبرهن فى بند على ان مسقطين اثنين بهذه الصفة لا يكفيان فى هذه الحالة الخصوصية لتعيين وضع المستقيم الفراغى

بند ٩ وتوجد حالة أخرى لا يكون فيها المسقطان دالين على مستقيم واحد فراغى وهى الحالة التى يكون فيها كل من المسقطين عموديا على خط الارض وليسا متلاقيين معه

فى نقطة واحدة لانك اذا أمررت بأحدهما مستويا عموديا على المستوى الافقى وبالآخر مستويا عموديا على المستوى الرأسى صار هذان المستويان متوازيين فلا يعينان وضع أى مستقيم ما

بنـــد من الآن فصاعدا سنضع مستويى المسقط باعتبارهما فى حالة انطباق بحيث يكون خط الارض خ ض شاغلا الوضع المبين فى (شكل ٢ لوحه ١) وبناء على ذلك يكون الجزؤ ه ض خ من ورقة الرسم دالا فى آن واحد على كل من الجزء المقدم من المستوى الافقى والجزء الاسفل من المستوى الرأسى الذى دار وانطبق على الجزء المقدم المذكور وأما الجزء ض خ ر من ورقة الرسم فانه يشتمل على الجزء الاعلى من المستوى الرأسى وعلى الجزء المؤخر من المستوى الافقى ولا يكفى حينئذ لاجل تعيين النقطة الفراغية أن يعطى مسقطاها ا و اَ (شكل ٢) فقط بدون تمييزهما عن بعضهما بل يلزم أن يذكر أيضا ماذا كانت النقطة ا هى المسقط الافقى للنقطة الفراغيـة أو هى مسقطها الرأسى لأن كلا هذين الفرضين صحيح وممكن اعتباره لكن بينهما فرق كبير جدا من حيثية الوضع الحقيقى للنقطة الفراغية وحينئذ فلاجل أن نفهم الطالب ونبين له الجنسية التابع لها كل من المسقطين قد اتفقنا على أن نسمى على الدوام المساقط الافقية للنقط أو المستقيمات بحروف خالية عن العلامات والمساقط الرأسية لها نسميها بنفس الحروف التى سميت بها مساقطها الافقية لكن يلزم ان يوضع على كل منها العلامة المعروفة بلفظة (بريم) مثلا النقطة (ا و اَ) (شكل ٢) تدل على النقطة الفراغية المسقطة افقيا فى نقطة ا ورأسيا فى اَ ونقطة (ب و بَ) تدل على النقطة الفراغية التى مسقطها الافقى ب ومسقطها الرأسى بَ وكذلك تعتبر مساقط كل من نقطتى (ح و حَ) و (ى و ىَ) بالاعتبار المتقدم وعلى التلامذة أن يعودوا فكرتهم بكثرة التمرين على تصور الاوضاع المختلفة الشاغلة لها هذه النقط المختلفة فوق او تحت أو امام أو خلف مستوى المسقط لكى بذلك يسهل عليهم معرفة الوضع التى تشغله أى نقطة معلومة بمسقطيها مهما كانت النقطة المذكورة فى أى زاوية من الزوايا الزوجية الاربعة المتكونة بين مستويى المسقط

بنـــد (شكل ٣ لوحه ١) الاصطلاح الذى اتبعناه فى تسمية مساقط النقط يلزم تطبيقه ايضا على الخطوط مثلا المستقيم (ا ب و اَ بَ) هو كناية عن المستقيم الفراغى الذى

مسقطه

مسقطه الافقى ا ب ومسقطه الرأسى اَ بَ ولكن حيث ان وضع أى مستقيم يصير معينا اذا علم منه نقطتان فيلزمنا حينئذ أن نشرح الطريقة العمومية لايجاد أثرى أى مستقيم أعنى نقطتى تقابل هذا المستقيم مع مستويى المسقط فنقول

حيث ان الاثر الرأسى للمستقيم (ا ب , اَ بَ) هو نقطة مشتركة بينه وبين المستوى الرأسى فيلزم حينئذ ان يكون مسقطه الافقى موجودا على خط الارض غ ض وعلى الخط ا ب الغير محدود الطول أيضا وحينئذ فيكون المسقط الافقى لهذا الاثر هو نقطة ح وبناء عليه يكون الاثر المذكور موجودا على احدى نقط الخط الرأسى ح حَ لكن حيث انه يوجد بالضرورة على المسقط الرأسى اَ بَ الغير المحدود فيكون حينئذ هو نقطة حَ ومن ذلك تنتج قاعدة عمومية ينبغى التمرين على استعمالها كثيرا فى الاحوال المختلفة لاوضاع المستقيم وهى ان يمد المسقط الافقى للمستقيم المعلوم حتى يتلاقى مع خط الارض فى نقطة فيقام منها عمود على خط الارض ويمد حتى يتلاقى مع المسقط الرأسى للمستقيم فى نقطة تكون هى الاثر الرأسى للمستقيم المعلوم

وأيضا حيث ان الاثر الافقى للمستقيم نفسه هو كناية عن نقطة موضوعة فى آن واحد على المستوى الافقى وعلى المستقيم المعلوم فيكون مسقطه الرأسى موجودا على كل من خط الارض غ ض والمسقط الرأسى اَ بَ الغير المحدود أعنى فى نقطة دَ وبناء على ذلك يكون الاثر الافقى نفسه موجودا على احدى نقط المستقيم دَ د المقام عموديا على خط الارض من نقطة دَ ولكن حيث ان هذا الاثر يوجد بالضرورة أيضا على المسقط الافقى ا ب الغير المحدود فهو حينئذ نقطة د

ومن ذلك يؤخذ انه للحصول على الاثر الافقى يمد المسقط الرأسى للمستقيم المعلوم حتى يتلاقى مع خط الارض فى نقطة فيقام منها عمود عليه ويمد هذا العمود حتى يتلاقى مع المسقط الافقى فتكون نقطة تلاقيهما هى الاثر الافقى المطلوب

بند ٢٢ وبالعكس اذا علم الاثران د , حَ لمستقيم أمكن ايجاد مسقطيه لانه حيث كانت نقطة حَ من نقط المستقيم الفراغى نفسه فاذا انزل منها عمود كالعمود حَ ح على خط الارض كانت نقطة تقابل هذا العمود بخط الارض نقطة من المسقط الافقى للمستقيم ويكون هذا المسقط بالضرورة هو د ح وبالمثل اذا اسقطنا نقطة د التى هى من نقط المستقيم المعلوم رأسيا على خط الارض تحصلت نقطة مثل دَ من

المسقط الرأسي الذي يصير بناء على ذلك كناية عن المستقيم ءَ حَ

ومن المستحسن أن يحث المعلم تلامذته على كثرة التمرين على حل هاتين المسئلتين المتضادتين في جملة مستقيمات مختلفة الاوضاع كالمستقيم (هو , هَوَ) (شكل ٤ لوحه ١) الذي أثره الافقي نقطة و وأثره الرأسي نقطة طَ أو كالمستقيم (م ه , مَ هَ) (شكل ٥ لوحه ١) الذي أثره الرأسي نقطة هَ وأثره الافقي نقطة ك

بند ٢٣ (قواعد في التنقيطات المصطلح عليها) قبل انتهاء الكلام على التعاريف الاولية يلزمنا أن نضع هنا بعض قواعد أصلية ينبغي مراعاتها عند رسم أي شكل من الهندسة الوصفية فنقول

حيث كان الغرض من هذه الرسومات هو تبيين شكل الاشياء بالرسم مع غاية الضبط والدقة فيلزم ان تكون أجناس الخطوط التي تستعمل فيها كافية بفهمها الناظر بالتعود عليها أعني أنها تورى الوضع الخاص لجميع الاجزاء المختلفة وتميز ما كان منها ظاهرا وما هو مختبأ بالنسبة لوضع الناظر لها وتساعد على التمييز بين الاشياء الناتجة من المسئلة وبين الخطوط التي لم ترسم الا للمساعدة على الحصول على هذه الاشياء فقط فلذا صار الاتفاق على القواعد الآتية للسير على مقتضاها دائما

فأولا الخطوط الاصلية أعني التي تدل على معالم أي مسئلة أو على نتائجها يجرى رسمها خطوطا كاملة مستمرة متى كانت مشاهدة اما اذا كانت تلك الخطوط الاصلية غير مشاهدة لزم بيانها بخطوط نقطية أعني مركبة من نقط مدورة فمثال النوع الاول وهو الخطوط الكاملة المستمرة مبين في (شكل ٦ لوحه ٢) بالخط ا ب ح د هو ومثال الثاني خط ر ح ط ى ك ل من نفس الشكل المذكور

وثانيا الخطوط المساعدة أعني الخطوط التي ليست من خطوط القسم الاول ولم يؤت بها الا للتوصل الى حل المسئلة وهذه الخطوط يلزم بيانها في الرسم بخطوط مجزئة أعني مركبة من جملة أجزاء خطية غير متصلة ببعضها وذلك مثل الخط م (شكل ٦) وليس لازما هنا التمييز بين ما هو مشاهد من هذه الخطوط وما هو مختبأ منها لانه ليس لها في الحقيقة وجود بل فقط يتصورها المهندس في ذهنه للوصول الى النتيجة المطلوبة

وثالثا قد توجد من ضمن هذه الخطوط المساعدة خطوط كثيرة الاهمية بالنسبة لامثالها ويراد تحويل النظر والالتفات اليها زيادة عن غيرها فمثل هذه الخطوط تبين في الرسم بخطوط مختلطة أعني مركبة من أجزاء خطية صغيرة منفصلة عن بعضها بنقطة

مدورة

مدورة أو نقطتين وذلك مثل المستقيمين ه , سه (شكل٦) انما لا ينبغي استعمال هذه الخطوط لرسم المستقيمات العمودية على خط الارض التي لم يكن القصد منها سوى الوصل بين مسقطي نقطة واحدة فقط

بـ ٢٤ ـد قد ذكرنا في البند السابق أن الخطوط الاصلية من أي مسئلة تكون اما مشاهدة فيلزم رسمها خطوطا كاملة واما مختفية فيلزم رسمها انقطية والآن نبين الكيفية التي بها يمكن التمييز بين خطوط هذين النوعين فنقول من المعلوم انه وان كان لا يمكن اعطاء قواعد مستوفية لهذا الخصوص الا من بعد الكلام على السطوح المنحنية لكن من حيث ان المسائل الاولية التي سنشتغل بها الآن لا يوجد فيها خطوط سوى المستقيم ولا سطوح سوى السطح المستوى فيكفينا حينئذ موقتا أن نقرر هنا الاعتبارات والاصطلاحات الآتية

بـ ٢٥ ـد يعتبر دائما أن الرسيم الذي يأخذ مساقط جميع الاشياء على المستوى الافقي واقف على بعد لا نهائي من المستوى المذكور من جهة فوق على الخط الرأسي المار باحدى نقط ذلك الشيء ونقطة بصره موجودة امام المستوى الرأسي وهذا الاعتبار الذي به يسهل علينا رسم المحيط الظاهري للسطوح المنحنية كما سنشاهد ذلك فيما سيأتي انشاء الله تعالى في بـ ١٣٨ ـد مأخوذ ومستنتج من طريقة اسقاط نقطة فراغية على مستو وفي الواقع لان الاشعة البصرية الواصلة من عين الرسيم الى جميع نقط الجسم تقرب كثيرا من ان تصير عمودية على المستوى الافقي كلما ازداد ارتفاع الرسيم عن المستوى المذكور مع انتقاله دائما على خط رأسي واحد بحيث متى صارت نقطة البصر موجودة في بعد لا نهائي صارت هذه الاشعة متوازية واتحدت مع المستقيمات المسقطة لنقط الجسم المنظور ومن هنا يشاهد ان المسقط الافقي لاي شيء كناية عن منظور ذلك الشيء الذي أخذ باعتبار نقطة بصر متباعدة بعدا لا نهائيا وموجودة على الخط الرأسي وهذه النتيجة محققة لما تقرر في مبدأ الاعتبار الذي نحن بصدده

وبمثل هذه الاسباب يعتبر دائما أن المسقط الرأسي لاي شيء مأخوذ باعتبار أن الرسيم موجود امام المستوى الرأسي وفوق المستوى الافقي ونقطة بصر هذا الرسيم موضوعة في بعد لا نهائي من المستوى الرأسي على العمود المقام على المستوى المذكور من احدى نقط الجسم المفروض

ويقتضى ذلك فكل خط أو جزء من خط أصلي وجد تحت المستوى الافقي أو خلف

المستوى الرأسى فهو مخبأ أعنى غير مشاهد وبناء على ذلك يلزم تنقيطه أعنى رسمه بنقط مدورة

وكذا اذا وجد فى المسئلة بعض مستويات لها وجود حقيقى وكان جزء من خط أصلى موضوعا خلف احدهذه المستويات أو تحته بالنسبة لوضع الرسم لزم أيضا تنقيط الجزء المذكور لكننا لا نزال نذكر الطالب أيضا أنه ليس لهذه التمييزات لزوم فى الخطوط المساعدة كما نبهنا على ذلك فى (بند ٢٣) ويمكن معرفة تطبيقات هذه القواعد فى كل من الاشكال ٣ و٤ و٥ وبالجملة فاننا سنذكر بها الطالب أيضا فى أغلب المسائل التى سنوردها

(ملحوظة مهمة) ينبغى قبل رسم أى لوحة من لوحات الهندسة الوصفية أن تراعى الاحتراسات الآتية وهى أن يجرأ ولا بالقلم الرصاص مستقيم غير محدود فى وسط ورقة الرسم ومواز تقريبا لطولها ثم يقام على وسط هذا المستقيم مستقيم آخر عمودى بالضبط على المستقيم الاول ويلزم لذلك استعمال طريقة البرجل لان المثلث الخشب لا يمكن به الحصول على الضبط الكافى فى اقامة مستقيم عمودى على مستقيم آخر خصوصا فى حالة ما يكون العمود المطلوب ذا طول كبير نوعا لكنه يستعمل مع غاية الضبط والسرعة فى رسم المستقيمات المتوازية ولذا انه من بعد رسم المستقيمين المتعامدين بالطريقة المتقدمة ترسم جميع الخطوط الموازية لخط الارض أو العمودية عليه بالتوازى لهما مع استعمال المثلثات الخشب بأن يوضع أحدهما بجوار الخط الذى يراد رسم الموازى له ثم يوضع المثلث الثانى بجانب الاول بحيث ينطبق أحد اضلاعه على أحد اضلاع المثلث الاول المذكور ثم يثبت المثلث الجديد ويحرك الاول بالاتكاء عليه الخ

ومما يجب التنبيه عليه هنا أيضا هو أن بعض الرسمة يجعلون خط الارض فى رسوماتهم أثخن من باقى الخطوط الاصلية ناظرين فى ذلك لكثرة اهمية الخط المذكور ولكنى أنصح التلامذة بان يحترسوا من اتباع هذا الرأى لانه ينشأ عن ذلك فى الغالب عدم ضبط فى تعيين وضع نقط تقابله بالمستقيمات الآخر فالاصوب حينئذ ان لا تجعل ثخانته أكثر من ثخانة باقى الخطوط الاصلية التى معه فى اللوحة

(الفصل الثانى)

(فى مسائل متنوعة على المستقيمات والمستويات)

بند ٢٦

بند ٦ د (مسائل ابتدائية على المستقيمات) المطلوب رسم المستقيم المار بنقطتين معلومتين كنقطتى (ا و اَ) و (ب و بَ) (شكل ٧ لوحه ٢) ثم ايجاد البعد الحقيقى بين هاتين النقطتين

فلذلك يقال حيث كان المستقيم الذى يراد رسمه مارا بالنقطتين المعلومتين فيكون مسقطه الافقى بمقتضى بند ٧ د مارا بالمسقطين الافقيين ا و ب للنقطتين المذكورتين ومسقطه الرأسى مارا بالمسقطين الرأسيين اَ و بَ لهما وبناء على ذلك يكون المسقط الافقى لهذا المستقيم هو اب ومسقطه الرأسى اَ بَ وبذلك يصير المستقيم الفراغى معينا باعتبار انه غير محدود

اما من خصوص البعد الحقيقى بين النقطتين (ا و اَ) و (ب و بَ) الذى مسقطاه هما اب و اَ بَ فلاجل تعيينه يقال من المعلوم أن المستقيم الفراغى يكون على الدوام أكبر من كل من مسقطيه الافقى والرأسى كل على حدته الا فى حالتين اثنتين الاولى اذا كان المستقيم الفراغى موازيا الى المستوى الرأسى كان مسقطه على المستوى المذكور مساويا له بالضبط والثانية اذا كان المستقيم الفراغى موازيا الى المستوى الافقى كان مسقطه الافقى مساويا له أيضا لكن من حيث ان المستقيم المعلوم (اب و اَ بَ) ليس موازيا الى المستوى الرأسى ولا الى المستوى الافقى بدليل ان كلا من مسقطيه غير موازالى خط الارض خ ض فلا يجوز اعتبار أى واحد من هذين المسقطين حقيقة للمستقيم الفراغى

واذن فلاجل ايجاد هذه الحقيقة يتوهم دوران المستوى اَ بَ ب ا المسقط افقيا للمستقيم المعلوم حول الرأسى اَ ا المسقط افقيا النقطة (ا و اَ) فى نقطة ا بشرط ان يفرض ان المستقيم الفراغى ثابت فى هذا المستوى ومنجذب معه فى اثناء حركته الى ان يصير ذلك المستوى والمستقيم الفراغى الموجود فيه موازيين الى المستوى الرأسى للمسقط ففى اثناء هذا الدوران تبقى نقطة (ا و اَ) ثابتة لوجودها على محور الدوران واما نقطة (ب و بَ) فانها ترسم فى الفراغ قوس دائرة موازيا الى المستوى الافقى فينسقط بناء على ذلك افقيا على قوس مثله كالقوس ب ب₁ مركزه فى نقطة ا لانها مسقط جميع نقط محور الدوران الموجود عليه مركز القوس الفراغى ونصف قطره

عبارة عن البعد ا ب ورأسيا على مستقيم موازٍ لخط الارض كالمستقيم تَ بَ وعند ما يصير المستقيم الفراغي موازيا الى المستوى الرأسي يؤل مسقطه الافقي الى المستقيم ا ب الموازي لخط الارض وحينئذ فيكون المسقط الافقي للنقطة المتحركة (ب و تَ) بعد الحركة كناية عن نقطة ب التي هي نقطة تقابل مسقط القوس بمسقط المستقيم من بعد الحركة ومسقطها الرأسي نقطة تقابل العمود المقام من المسقط الافقي الجديد ب على خط الارض بالمسقط الرأسي للقوس أعني نقطة تَ ومن هنا يرى ان المسقط الرأسي للمستقيم الفراغي قد آل من بعد الحركة الى المستقيم اَ تَ الذي يكون بناء على ذلك مساويا بالضبط الى حقيقة المستقيم الفراغي

بند ٢٧ ويمكن أيضا ايجاد هذه الحقيقة بواسطة دوران المستوى المسقط رأسيا للمستقيم الفراغي حول الخط الافقي المسقط رأسيا للنقطة (ا و اَ) في اَ الى ان يصيره والمستقيم الفراغي الموجود فيه موازيا الى المستوى الافقي وفي هذه الحالة تكون العمليات والبراهين اللازم أجراؤها مشابهة للعمليات والبراهين التي أجريت في الحالة المتقدمة ويكون المسقط الافقي الجديد وهو ا ب للمستقيم الفراغي من بعد ان يصير موازيا الى المستوى الافقي مساويا لحقيقة المستقيم الفراغي أو لحقيقة البعد بين نقطتي (ا و اَ) و (ب و تَ) المعلومتين

(نتيجة) اذا مد المستقيم تَ بَ على استقامته حتى تقابل مع امتداد الخط الرأسي ا اَ في نقطة مثل د حدث مثلث بَ اَ د القائم الزاوية في د وتره وهو بَ اَ هو البعد الحقيقي بين النقطتين وضلع قائمته وهو د بَ = ا ب = ا ب أعني يساوي للمسقط الافقي للبعد بين النقطتين وضلع القائمة الثاني وهو د اَ = د ك ـ اَك = تَ ع ـ اَ ك أعني مساويا للفرق بين ارتفاعي النقطتين المعلومتين عن المستوى الافقي المقدرين ببعدي مسقطيهما الرأسيين عن خط الارض

وأيضا اذا مد المستقيم ب ب على استقامته الى ان يقابل المستقيم ا اَ في نقطة مثل ط حدث مثلث ا ب ط وتره وهو ا ب هو البعد الحقيقي بين النقطتين المعلومتين (ا و اَ) و (ب و تَ)

و (ب و ث) المعلومتين وضلع قائمته ب ط = ب آ = ت أ أعنى مساويا الى المسقط الرأسى للمستقيم الواصل بين النقطتين وضلع القائمة الثانى وهو اط = الث ـ ط ث = الث ـ ب ع اعنى مساويا للفرق بين بعدى النقطتين المعلومتين عن المستوى الرأسى المقدرين ببعدى مسقطيهما الافقيين عن خط الارض

ومن هذه النتيجة تؤخذ قاعدة عمومية لاجل تعيين البعد الحقيقى بين نقطتين معلومتين بمساقطهما وهى ان يركب مثلث قائم الزاوية احد ضلعى قائمته المسقط الافقى للمستقيم الواصل بينهما وضلعه الثانى الفرق بين ارتفاعى النقطتين المذكورتين عن المستوى الافقى المقدرين ببعدى مسقطيهما الرأسيين عن خط الارض أو يركب مثلث قائم الزاوية بواسطة المسقط الرأسى للمستقيم الواصل بين النقطتين والفرق بين بعدى المسقطين الافقيين للنقطتين المعلومتين عن خط الارض فكل من وترى المثلثين القائمى الزاوية المنشئين بهذه الكيفية يكون حقيقة للبعد الكائن بين النقطتين المفروضتين

بند ٢٨ (طريقة ثانية لحل المسئلة المتقدمة) اذا فرض ان النقطتين المعلومتين هما (ا و آ) و (ب و ب) (شكل ٨ لوحه ٢) وكان المطلوب ايجاد حقيقة المستقيم المحدود (اب و آ ب) الواصل بينهما يقال ان هذا المستقيم صانع مع المستقيمين المسقطين افقيا النهايتيه ومع المسقط الافقى اب شبه منحرف وحينئذ فيمكن ايجاد حقيقة ذلك المستقيم بتطبيقه على المستوى الافقى للمسقط ولذلك يتوهم دوران شبه المنحرف المذكور بفرض ارتباط اضلاعه ببعضها وحفظ الزوايا الواقعة بينها حول المسقط الافقى اب الى ان ينطبق على المستوى الافقى بحيث كان المستقيمان المسقطان افقيا النهايتين عمودين على المسقط الافقى فى الوضع الاصلى فلايزالان عمادين عليه بعد الانطباق وحينئذ اذا أقيم العمود ب ب من نقطة ب على اتجاه المسقط الافقى اب وأخذ عليه بعد ب ب مساويا الى طول المستقيم المسقط افقيا النقطة (ب و ب) المقدر ببعد ب ه ثم اقيم عمود ا ا أيضا وأخذ عليه بعد ا ا مساويا الى ا و وبعد ذلك وصل المستقيم ا ب كان هذا المستقيم هو منطبق المستقيم المراعى على المستوى الافقى واذن فهو حقيقته

ويمكن أيضا ايجاد حقيقة لمستقيم (اب, آ ب) (شكل ٨ لوحه ٢) بواسطة تدوير شبه المنحرف المتكون منه ومن المستقيمين المسقطين رأسيا النهايتيه ومن مسقطه الرأسى

أَبَ حول المسقط الرأسي المذكور الى ان ينطبق على المستوى الرأسي ومن بعد تطبيقه بكيفية مماثلة للكيفية التي أجريناها عند التطبيق على المستوى الافقي نجد ان حقيقة المستقيم عبارة عن البعد ا ب

(تنبيه) اذا امد منطبق المستقيم على المستوى الافقي الذي هو مستقيم ب ا على استقامته يلزم ان يمر امتداده بالاثر الافقي ء للمستقيم الاصلي لان هذا الاثر هو نقطة من المستقيم الفراغي ثابتة اثناء حركته بسبب وجودها على محور الدوران فلا يزال المستقيم المذكور مارًّا بها بعد الانطباق

وكذا اذا امد الانطباق ب ا على استقامته لزم ان يمر كما تقدم بالاثر الرأسي ح للمستقيم الاصلي

بسئلة وبالعكس اذا علم مستقيم غير محدود كالمستقيم (ب ى , بَ ىَ) (شكل ٨ لوحه ٢) ونقطة عليه كنقطة (ب , بَ) وكان المطلوب ايجاد نقطة على هذا المستقيم مثل نقطة (ا , اَ) بحيث يكون بعدها عن النقطة المعلومة (ب , بَ) مساويا لكمية معلومة رمزها م فلذلك يطبق المستقيم المعلوم على المستوى الافقي بموجب ما تقدم بأن يؤخذ البعد ب ب = بَ ه ويوصل المستقيم ب ى الذي يكون هو منطبق المستقيم المعلوم ثم بعد ذلك تقطع على هذا المستقيم بالابتداء من نقطة ب مسافة مثل ب ا مساوية الى البعد المعلوم م فاذا توهمنا قيام المستقيم المنطبق ب ى ورجوعه الى وضعه الاصلي رجعت معه نقطة ا الى نقطة ا بعمود على محور الدوران ب ى وأخيرا يعين المسقط الرأسي لهذه النقطة بأن يقام من مسقطها الافقي ا عمود على خط الارض ويمد حتى يتلاقى مع المسقط الرأسي للمستقيم في نقطة مثل اَ فتكون هي المسقط الرأسي للنقطة المطلوب ايجادها

بسئلة المستقيمان المتوازيان في الفراغ تكون مساقطهما المتحدة الاسم متوازية مثلا اذا فرض ان المستقيمين الفراغيين ا ب , حى (شكل ٩ لوحه ٢) متوازيان أقول ان مسقطيهما الافقيين اَ بَ , حَ ىَ متوازيان ومسقطيهما الرأسيين اً بً , حً ىً متوازيان أيضا

وذلك لانه لما كان المستقيمان الفراغيان ا ب , حى متوازيين فالمستويان اب بَ اَ , حى ىَ حَ المسقطان لهما افقيا يكونان متوازيين وبناء على ذلك يكون

خطا

خطا تقاطع هذين المستويين بالمستوى الافقى اللذان هما آ تَ , حَ ءَ أعنى المسقطين الافقيين للمستقيمين الفراغيين متوازيين أيضا ويمثل ذلك يبرهن على ان مسقطيهما الراسيين آ تَ , حَ ءَ يكونان متوازيين

وبالعكس اذا كان المسقطان الافقيان آ تَ و حَ ءَ (شكل ٩ لوحه ٢) لمستقيمين فراغيين متوازيين وكان مسقطاهما الراسيان آ تَ , حَ ءَ متوازيين أيضا يلزم بناء على ماسبق فى برهان الحالة الاولى ان يكون المستقيمان الفراغيان اب , حد متوازيين

وبمقتضى هذه النظرية وعكسها يمكن حل المسئلة الآتية وهى

المعلوم مستقيم مثل (اب , آ تَ) (شكل ١٠ لوحه ٢) ونقطة خارجة عنه مثل (ء , ءَ) والمطلوب مد مستقيم من هذه النقطة يكون موازيا الى المستقيم المعلوم لذلك يكفى ان يمرر من نقطة ء التى هى المسقط الافقى للنقطة المعلومة مستقيم مثل ءه موازا الى اب فيكون مستقيم ءه مسقطا افقيا للمستقيم المطلوب وأيضا يمد من نقطة ءَ مستقيم مثل ءَهَ موازا الى آ تَ فيكون هو المسقط الراسى للمستقيم المطلوب أيضا فاذا أريد ايجاد أثرى المستقيم (ءه , ءَهَ) الذى تعين بهذه الصورة يجرى العمل بمثل ما تقدم فى بند ٢١

بند ٣١ (تعيين المستويات بحسب شروط معاليمها) المعلوم مستقيمان والمطلوب ايجاد المستوى المار بهما وانتبه قبل الشروع فى حل هذه المسئلة أولا على أن المستوى يبين فى الهندسة الوصفية بأثريه وأثرا المستوى هما خطا تقاطعه بمستويى المسقط فخط تقاطعه بالمستوى الافقى يسمى أثره الافقى وخط تقاطعه بالمستوى الراسى يسمى أثره الراسى

ولا يخلو الحال عن ان يكون المستوى الفراغى إما متلاقيا مع خط الارض واما موازيا له فاذا كان المستوى متلاقيا مع خط الارض لزم دائما ان تكون نقطة تلاقيهما موجودة على كل من أثريه الافقى والراسى وهذا يدل على انه يلزم فى هذه الحالة أن يكون اثرا المستوى متلاقيين فى نقطة واحدة من خط الارض واما اذا كان المستوى المعلوم موازيا الى خط الارض لزم ان يكون أثراه موازيين لخط الارض أيضا

وثانيا على انه اذا كان مستقيم فراغى موجودا داخل مستو فراغى أيضا لزم ان يكون أثرا هذا المستقيم موجودين على أثرى المستوى كل على نظيره وهذا أمر بديهى اذلا يتأتى

للمستقيم المذكور مهما امتدان يخرج عن المستوى الموجود هو فيه
ولنرجع الآن لحل المسئلة المذكور منطوقها فى اول هذا البند فنقول لاشك ان المستقيمين المعلومين اللذين يراد تمرير المستوى المطلوب بهما اما ان يكونا متقاطعين أو متوازيين
فاذا اعتبرنا الحالة الاولى وفرض أن المستقيمين المتقاطعين المعلومين هما (اب و آبَ) و (حد و حَدَ) (شكل ١١ لوحه ٣) يقال يلزم التحقق أولا مما اذا كان المستقيمان المذكوران متقاطعين فى الفراغ أم لا ولمعرفة ذلك ينظر فى نقطة تقاطع مسقطيهما الافقيين وهى ه ونقطة تقاطع مسقطيهما الرأسيين وهى هَ فان كانتا على عمود واحد على خط الارض كما هو مفروض فى شكل ١١ علم من ذلك أن مستقيمى (اب و آبَ) و (حد و حَدَ) متقاطعان وان كانت بخلاف ذلك علم ان المستقيمين المذكورين غير موجودين فى مستو واحد وبعد التحقق من تقاطع المستقيمين المذكورين فى الفراغ بواسطة الامتحان المتقدم يكفى لتعيين اثرى المستوى المار بهما أن يقال حيث ان المستوى المطلوب ايجاده مشتمل على المستقيمين المعلومين فبناء على التنبيه الثانى المتقدم تكون آثارهما موجودة على أثريه ويلزم حينئذ البحث عن أثرى كل من المستقيمين المذكورين بمقتضى ما تقدم فى بند ٣٢ فنجد أن الاثر الافقى للمستقيم (اب و آبَ) هو ا وأثره الرأسى بَ وان الاثر الافقى للمستقيم (حد و حَدَ) هو ح وأثره الرأسى دَ فاذا وصل بين الاثرين الافقيين ا و ح بمستقيم حا ثم بين الاثرين الرأسيين بَ و دَ بمستقيم بَدَ كان المستقيمان حا و بَدَ كناية عن أثرى المستوى المار بالمستقيمين (اب و آبَ) و (حد و حَدَ) المعلومين ولاجل تحقيق الرسم يلزم بناء على ما تقرر فى التنبيه الاول أن يتقاطع كل من الاثرين حا الافقى و بَدَ الرأسى من المستوى المطلوب فى نقطة واحدة مثل س على خط الارض
بند ٣٤ الحالة الثانية اذا كان المستقيمان المعلومان (اب و آبَ) و (حد و حَدَ) (شكل ١٢ لوحه ٣) متوازيين لزم أن يكون مسقطاهما الافقيان اب و حد متوازيين ومسقطاهما الرأسيان آبَ و حَدَ متوازيين أيضا كما فى بند ٣٣ ولتعيين أثرى المستوى المار بهما يبحث كما تقدم فى الحالة الاولى عن أثرى كل من المستقيمين المذكورين ويمر بالاثرين الافقيين ح و ا مستقيم مثل حاس فيكون هو الاثر الافقى للمستوى وبالاثرين الرأسيين دَ و بَ مستقيم مثل دَبَ س فيكون هو الاثر

الرأسى

الرأسي للمستوى المذكور وبمقتضى ماتقدم يلزم ان يكون متقاطعا مع الاثر الافقي في نقطة مثل س على خط الارض غ ض

(نتيجة) إذا كان المطلوب تمرير مستو بثلاث نقط معلومة مثل (ع و عَ) , (ه و هً) , (م و مَ) (شكل ١١ لوحه ٣) يكفي لذلك ان يمرر بنقطتي (ه و هَ) , (ع و عَ) مستقيم مثل (عه و عَهَ) وأيضا يمرر بنقطتي (ه و هً) , (م و مَ) مستقيم آخر مثل مه و مَهَ) فيكون قاطعا المستقيم الاول في نقطة (ه و هَ) وتؤول المسئلة حينئذ الى كيفية تمرير مستو بمستقيمين متقاطعين وبمقتضى ماتقدم يكون تَ س ح هو المستوى المطلوب

(نتيجة ثانية) اذا كان المعلوم مستقيما مثل (اب و اَبَ) (شكل ١٢ لوحه ٣) ونقطة خارجة عنه مثل (م و مَ) واريد تمرير مستو بهما كفى لذلك ان يمرر من النقطة المذكورة مستقيم قاطع أو مواز للمستقيم (اب و اَبَ) المعلوم ولكن هذا الموازي هو المستقيم (حمء و حَمَءَ) فتؤول المسئلة الى تمرير مستو بمستقيمين متوازيين فيكون بناء على ماتقدم المستوى ءَ س ح هو المستوى المطلوب

بند ٣٣ المعلوم مستو مثل عهك (شكل ١٣ لوحه ٣) ونقطة خارجة عنه مثل نقطة (م و مَ) والمطلوب مد من هذه النقطة مستو موازله

لذلك يقال من المعلوم ان اثرى المستوى المطلوب سيكونان موازيين الى اثرى المستوى المعلوم عه , هك كل لنظيره لان المستويين المتوازيين تكون آثارهما المتحدة الاسم متوازية وبناء عليه فاللازم انما فقط هو ايجاد نقطة من كل اثر من اثرى المستوى المطلوب ولذلك يمرر من النقطة المعلومة (م و مَ) مستقيم مواز للمستوى عهك فيؤخذ أولا مستقيم مثل (اب , اَبَ) داخل المستوى المذكور بأن يؤخذ اثراه ا , بَ على اثرى المستوى عهك وبعد ذلك يمد من نقطة (م و مَ) مستقيم (ءمح , ءَمَ حَ) موازا الى مستقيم (اب , اَبَ) فيكون المستقيم الاول موجودا بأكمله في المستوى المطلوب واذن يلزم البحث عن اثريه وليكونا ح , ءَ وبمد منهما مستقيمان موازيان الى اثرى المستوى المعلوم فيتعين مستو مثل ءَلح هو المستوى المطلوب

بند ٣٤ ويمكن لاجل السهولة والوفر في الرسم تعويض المستقيم الذي أخذ في الحالة الاولى داخل المستوى المعلوم في وضع حيثما اتفق باحد اثرى المستوى المعلوم

مثلا اذا اريد من نقطة (م و مَ) (شكل ١٤ لوحه ٣) مد مستو موازالى المستوى ع ﻫ ك المعلوم يمر بالنقطة (م و مَ) مستقيم موازالى الاثر الافقى ﻟ ﻫ من المستوى المعلوم فيكون مسقطه مستقيما مثل م ب موازيا الى الاثر الافقى ﻟ ﻫ ومسقطه الرأسى مستقيما مثل مَ تَ موازالى خط الارض لان المستقيم المار فى الفراغ بنقطة (م و مَ) والموازى الى الاثر الافقى ﻟ ﻫ يكون موازيا الى المستوى الافقى للمسقط وعلى هذا يكون الاثر الافقى لهذا المستقيم معدوما اما أثره الرأسى تَ فيتعين بمقتضى بند ٢١ فاذا مد حينئذ من نقطة تَ مستقيم مثل تَ ل موازالى ع ﻫ ثم من نقطة تقابله بخط الارض وهى ﻟ مد مستقيم ﻟ ﺣ موازالى ﻫ ك حدث مستو مثل تَ ﻟ ﺣ هو المستوى المطلوب

ويمكن أيضا ان يمد من النقطة المعلومة (م و مَ) مستقيم مثل (ﺣ م و ﺣَ مَ) موازللاثر الرأسى من المستوى بدلا عن الموازى الى أثره الافقى ويكون العمل عين ماتقدم

بند ٣٥ من المهم ان يلاحظ اننا لم نعتبر فى شكلى (١٣ و ١٤) أن المستويين المتوازيين لهما وجود حقيقى فى الفراغ لان ذلك كان يستلزم عدم ظهور المستوى دَ ﻟ ﺣ (شكل ١٣ لوحه ٣) لاختفائه تحت المستوى ع ﻫ ك وعليه فكان يجب تنقيط اثرى المستوى الاول بمقتضى الاصطلاح المقرر ببند ٢٣ لكن حيث ان ذلك مما يكثر عدد الخطوط المنقطة ويعطل الذهن عن تمييز الاجزاء من اثرات المستويات التى تكون امام اوخلف مستويى المسقط فلهذا يعتبر دائما ان الموجود من المستوى هو اثراه فقط وفى بعض الاحيان يعتبر للمستوى الفراغى وجود حقيقى لكن عندما يعتبر ذلك فلانهمل فى أخبار الطالب بذلك للتنوير عليه وعدم الوقوع فى الخطأ

بند ٣٦ يمكن بواسطة الاعتبارات المقررة فى بند ٣٣ حل المسئلة الآتية وهى المعلوم المسقط الافقى ا ب (شكل ٥ لوحه ٣) لمستقيم مجهول المسقط الرأسى لكنه محقق الوجود داخل مستو فراغى معلوم كالمستوى م ﻫ ك والمطلوب تعيين مسقطه الرأسى المجهول فلذلك يقال لاشك اننا اذا مددنا المسقط الافقى المعلوم حتى تلاقى مع خط الارض فى نقطة ولتكن ا كانت هذه النقطة هى المسقط الافقى للاثر الرأسى من المستقيم الذى يراد تعيين مسقطه الرأسى وحيث ان هذا الاثر موجود أيضا على الاثر الرأسى م ﻫ

من

من المستوى المعلوم م ﻫ ك فيكون حينئذ هو نقطة أ التي هي نقطة تقابل الاثر م ﻫ مع العمود ا أ المقام من نقطة ا على خط الارض خ ض اما الاثر الافقي للمستقيم المذكور فانه يوجد على كل من مسقطه الافقي ا ب المعلوم والاثر الافقي ﻫ ك للمستوي الشامل له وعلى ذلك فهو نقطة تقابلهما ب وبناء على ما ذكر قد صار المستقيم معين الاثرين وهما أ و ب فبمقتضى بند ٣٥ يمكن تعيين مسقطه الرأسي أ ت الذي كان مجهولا فاذا كان المعلوم من المستقيم هو مسقطه الرأسي أ ت (شكل ١٥ لوحه ٣) وأريد تعيين مسقطه الافقي المجهول أجرى العمل مثل ما تقدم في الحالة الاولى

فاذا فرض أن المسقط الافقي ا ب المعلوم (شكل ١٦ لوحه ٣) موازالى الاثر الافقي ﻫ ك من المستوي المعلوم م ﻫ ك يعين الاثر الرأسي ت من المستقيم المذكور كما تقدم وأما أثره الافقي فكونه معدوما بسبب عدم تقاطع خط ب ا بخط ﻫ ك يعلم أن المستقيم الفراغي المطلوب موازالى المستوى الافقي للمسقط ويكون مسقطه الرأسي بناء على ذلك عبارة عن المستقيم ت أ الموازي الى خط الارض خ ض

وبمثل ذلك يرى أنه اذا كان المسقط الافقي المعلوم هو مستقيم ح ى الموازي الى خ ض (شكل ١٦ لوحه ٣) دل ذلك على أن المستقيم في الفراغ مواز الى المستوى الرأسي للمسقط ويكون حينئذ مسقطه على هذا المستوى الاخير عبارة عن المستقيم ى ح الموازي الى ﻫ م بند ٣٧ وهناك أيضا مسئلة مشابهة للمسئلة المتقدمة وهي

المعلوم المسقط الافقي ح (شكل ١٥ لوحه ٣) لنقطة محقق وجودها في مستو معلوم مثل م ﻫ ك والمطلوب تعيين مسقطها الرأسي فلحل هذه المسئلة يمد من نقطة ح المعلومة مستقيم حيثما اتفق مثل ا ح ب ويعتبر مسقطا أفقيا لمستقيم موجود في المستوى المعلوم م ﻫ ك ثم يبحث بمقتضى المسئلة السابقة عن المسقط الرأسي أ ت لهذا المستقيم وحينئذ لم يبق سوى أن يبحث عن المسقط الرأسي للنقطة على المستقيم أ ت الذي هو المسقط الرأسي لمستقيم مار بها ولذلك ينزل منها عمود على خط الارض ويمد حتى يتلاقى مع أ ت في نقطة مثل ح فتكون هي المسقط الرأسي المطلوب ويمكن أيضا تعيين المسقط الافقي ح للنقطة اذا كان مجهولا وكان المعلوم هو مسقطها الرأسي ح

تنبيه عوضا عن أن يؤخذ المستقيم المساعد ا ح ب (شكل ١٥ لوحه ٣) المار بنقطة ح في اتجاه حيثما اتفق الاحسن والاسهل ان يمرر بها مستقيم موازللاثر الافقي ﻫ ك من المستوي أو مستقيم مواز لخط الارض ومثال ذلك مبين في (شكل ١٦ لوحه ٣)

فالنظر اليه غان عن التطويل

بند ٣٨ (تقاطع المستويات مع بعضها) المطلوب ايجاد خط قاطع مستويين معلومين وهو على جملة حالات بحسب أوضاع المستويين المتقاطعين

الحالة الاولى أن تكون آثار المستويين المعلومين متقاطعة مثنى داخل حدود الرسم كما اذا أريد مثلا ايجاد خط تقاطع المستوى م ﻫ ك (شكل ١٧ لوحه ٤) بالمستوى س ع ص فلذلك يقال بما ان خط التقاطع المطلوب موجود في كل من المستويين م ﻫ ك و س ع ص فيكون اثراه موجودين على اثرى كل منهما بمعنى ان أثره الافقي يكون عبارة عن نقطة ا التي هي نقطة تقابل أثريهما الافقيين ﻫ ك و ع ص وأثره الراسي يكون عبارة عن نقطة ت أيضا وحيث علم أثرا خط التقاطع سهل تعيين مسقطيه وهما اب و آت بمقتضى بند ٣٢

بند ٣٩ الحالة الثانية أن يكون اثنان من آثار المستويين متقاطعين معا والآخران متوازيين كالمستويين م ﻫ ك و س ع ص (شكل ١٨ لوحه ٤) بأن كان اثراهما المتوازيان هما ﻫ ك و ع ص الافقيان فيقال من كون الاثرين المذكورين غير متقاطعين يعلم أن خط التقاطع مستقيم أفقي أعني موازيا الى المستوى الافقي للمسقط حيث لا أثر له على المستوى المذكور وبناء على ذلك يكون المسقط الراسي للخط المذكور هو المستقيم آت الموازي لخط الارض والممدود من نقطة آ التي هي أثره الراسي وذلك بمقتضى ما قيل في الحالة الاولى وأما المسقط الافقي فيتعين بأن ينزل من آ عمود مثل آ ا على خط الارض ومن نقطة تقابلهما وهي ا يرسم المستقيم اب موازيا للاثرين الافقيين ﻫ ك و ع ص من المستويين المعلومين فيكون اب هو المسقط الافقي للفاصل المشترك المطلوب ومثل ذلك يعمل في حالة ما يكون الاثران الراسيان من المستويين المعلومين هما المتوازيان

بند ٤٠ الحالة الثالثة أن يكون المطلوب ايجاد خط تقاطع مستو حيثما اتفق مثل م ﻫ ك (شكل ١٩ لوحه ٤) بمستو موازلاحد مستويي المسقط كالمستوى س ع الموازي الى المستوى الافقي مثلا فلذلك يقال أن خط التقاطع في هذه الحالة مستقيم أفقي لكونه موجودا في المستوى س ع الموازي للمستوى الافقي فلهذا وكون خط التقاطع المذكور موجودا أيضا في المستوى م ﻫ ك هو حينئذ موازلاثره الافقي ﻫ ك أعني احدافيياته وبناء على ذلك يكون المسقط الراسي لخط التقاطع المذكور عبارة عن

المستقيم

المستقيم آس الموازى لخط الارض والممدود من نقطة آ أعنى منطبقا على الاثر الرأسى ع صه من المستوى القاطع الموازى للمستوى الافقى للسقط وأما مسقطه الافقى فهو المستقيم اب الموازى الى الاثر هك ومثل ذلك يجرى فى حالة ما يكون احد المستويين المتقاطعين موازيا الى المستوى الرأسى عوضا عن ان كان موازيا الى الافقى

بند ٤٤ د الحالة الرابعة أن تكون اثرات المستويين المتقاطعين متقاطعة مثنى لكن فى خارج حدود الرسم وذلك كحالة المستويين مهك و سع صه (شكل ٢٠ لوحه ٤) فلتعيين خط التقاطع فى هذه الحالة يقال يلزم أن يعين منه نقطتان بدلا عن نقطتى الاثرين اللتين وقعتا خارج حدود الرسم وللوصول الى ذلك نقطع المستويين المعلومين م ه ك , س ع صه بمستو مساعد أول اتجاهه اختيارى فيقطعهما فى مستقيمين وهذان المستقيمان يتقاطعان فى نقطة فتكون تلك النقطة بالضرورة نقطة من خط تقاطع المستويين الاصليين ثم نقطعهما بمستو مساعد آخر ونفعل بهما كما فعل بالمستوى الاول ونتعين به نقطة ثانية من خط تقاطع المستويين الاصليين أيضا فاذا وصل بين النقطة الاولى والثانية بمستقيم كان هو خط التقاطع المطلوب

ولاجل السهولة يؤخذ المستويان المساعدان موازيين لاحد مستويى المسقط وليكن احدهما هو المستوى لَ لاَ الموازى الى المستوى الافقى مثلا فيقطع المستوى مهك فى مستقيم يسقط رأسيا على نفس الاثر لَ لاَ وأفقيا على المستقيم ل ب الموازى الى هك (انظر بند ٤٤ د) وكذا يقطع المستوى الثانى سع صه فى مستقيم آخر مثل (لاَ لَ , لا ب) ونقطة ب التى هى نقطة تقابل المسقطين الافقيين ل ب , لا ب تكون هى المسقط الافقى لنقطة من خط التقاطع المطلوب مسقطها الرأسى نقطة بَ تقابل العمود المقام من المسقط الافقى ب على خط الارض مع المستقيم لَ لاَ الذى هو مسقط رأسى مشترك لكل من خطى تقاطع المستوى لَ لاَ مع مستويى م ه ك , س ع صه ولاجل ايجاد نقطة أخرى من خط التقاطع المطلوب يستعان بمستو ثان مساعد كالمستوى طَ حَ الافقى أيضا فيقطع مستوى م ه ك فى المستقيم (طَ حَ , ط ا) ومستوى سع صه فى المستقيم (حَ طَ , ح ا) الذى يعين بتقاطعه مع المستقيم الاول نقطة مثل (ا , اَ) فتكون نقطه ثانيه من خط التقاطع المطلوب الذى يكون بناء على ذلك عباره عن المستقيم (اب , اَ بَ) بحيث اذا امتد مسقطه الافقى اب مر بنقطة تقاطع

الاثرين الافقيين ﻫك و ع ﺻﻪ واذا مد مسقطه الرأسى آ َآ مر بنقطة تقاطع الاثرين الرأسيين مﻫ و سع وهذا أمر سهل التصور لا يحتاج الى زيادة التطويل

(تنبيه) قد أخذت المستويات المساعدة هنا موازية للمستوى الافقى من مستويي المسقط لكنه كان يمكن أخذها موازية الى المستوى الرأسى والعمل بعينه

بند ٤٢ الحالة الخامسة وهى التى تكون فيها أثرات المستويين المتقاطعين متوازية

لا يخفى ان كل مستويين أثراتهما متوازية يكونان على العموم متوازيين مالم تكن أثراتهما المتوازية موازية الى خط الارض ومنعكسة الترتيب لان كل مستويين بهذه الصورة يتقاطعان فى مستقيم موازٍ الى خط الارض المذكور

ولنفرض مستويين من هذا القبيل كالمستويين اللذين أثرا أحدهما هما سﺻﻪ و سَﺻَﻪ (شكل ١٢ لوحه ٤) وأثرا المستوى الثانى هما مﻫ و مَﻫَ والمفروض انها جميعا متوازية وموازية الى خط الارض ومنعكسة الترتيب بالنسبة له يعنى ان المستوى الذى أثره الافقى سﺻﻪ الاقرب من غيره بالنسبة لخط الارض يكون أثره الرأسى هو سَﺻَﻪ الابعد بالنسبة لخط الارض المذكور والعكس بالعكس وقد اعتبرنا فى (الشكل ١٢ لوحه ٤) ان المستويين المعلومين لهما وجود حقيقى فى الفراغ ولذا قد التزمنا بتنقيط الاثرين سﺻﻪ و مَﻫَ المختبأين وراثهما طبقا للاصطلاح المقرر فى بند ٢٥

فلايجاد خط تقاطع هذين المستويين يقطعان بمستو مساعد حيثما اتفق مثل طعى الذى يقطع المستوى (سﺻﻪ و سَﺻَﻪ) فى المستقيم (لر و لَرَ) والمستوى (مﻫ و مَﻫَ) فى المستقيم (حف و حَفَ) وهذا المستقيم الاخير متقاطع مع المستقيم الاول فى نقطة (ظ و ظَ) التى تكون حينئذ نقطة من خط التقاطع المطلوب وحيث ذكرنا فى أوائل هذه المسئلة ان خط التقاطع موازٍ لخط الارض فيكفى حينئذ لايجاده ان يمد من نقطة (ظ و ظَ) مستقيم مثل (ظو و ظَوَ) موازٍ لخط الارض فيكون هو خط التقاطع المطلوب

ويمكن أيضا أن يؤخذ عوضا عن المستوى طعى المأخوذ حيثما اتفق مستوى قطاع عمودى على خط الارض غض مثل المستوى غﻫك (شكل ١٢ لوحه ٤) الذى يكون خطا تقاطعه بمستويي المسقط الاصليين عبارة عن المستقيمين ﻫغ و ﻫك الكائنين على استقامة واحدة وهذا المستوى يقطع الاثرين الرأسيين للمستويين

المعلومين

المعلومين فى نقطتين مثل ى ، ت فاذا أدرنا المستوى المساعد المذكور حول أثره الافقى ه لـ الى أن ينطبق على المستوى الافقى للمسقط انطبق أثره الرأسى ه غ على خط الارض غ ض وانطبقت معه نقطتا ى و ت اللتان هما نقطتا تقابل مستوى القطاع غ ه لـ مع الاثرين الرأسيين ءم و صمس للمستويين الاصليين أوهما الاثران الرأسيان لخطى تقاطع مستوى القطاع بالمستويين الاصليين بأن يرسما قوسى ىى و تب فى المستوى الرأسى ويأتيا فى ى و ب من خط الارض وعلى هذا يكون حى و اب منطبقين لخطى تقاطع المستوى غ ه لـ بالمستويين الاصليين على المستوى الافقى للمسقط ولكون الخطين المذكورين متقاطعين فى نقطة ه تكون هذه النقطة نقطة من خط التقاطع المطلوب فاذا اسقطت نقطة ه افقيا فى نقطة ه علم ان المسقط الافقى لخط التقاطع المطلوب هو المستقيم ه و الموازى الى غ ض وأيضا اذا رفعنا مستوى القطاع الى وضعه الاصلى انسقطت نقطة ه رأسيا على نقطة هَ وصار المستقيم هَ وَ الموازى الى خط الارض مسقطا رأسيا لخط تقاطع المستويين المعلومين

بـ ٤٣ د الحالة السادسة اذا كانت اثرات المستويين المتقاطعين متلاقية جميعها فى نقطة واحدة من خط الارض كانت هذه النقطة بالضرورة نقطة من خط تقاطع المستويين المعلومين وعلى ذلك فلا يلزم البحث سوى عن نقطة ثانية منه ولذا تستعمل احدى الطريقتين المدونتين فى البند السابق وقد اكتفينا بذكر هذه الملحوظات من باب التذكار والمساعدة للتلامذة وعلى المعلم أن يكلفهم بحل هذه المسألة وعمل الشكل اللازم لها تمرينا لهم على تطبيق القاعدتين المذكورتين فى بـ ٤٢ د على حلها وليتحقق المعلم من تمكن تلامذته فى تصورهم للقواعد الماضية أو عدمه

بـ ٤٤ د طريقة اخرى لحل المسألة المذكورة فى الحالة الرابعة بـ ٤١ د

قد يكون الحل المستعمل (فى بـ ٤١ د حالة رابعة) غير كاف فى بعض الاحيان لايجاد خط تقاطع المستويين مثلا اذا فرض ان المطلوب ايجاد خط تقاطع مستويين مثل م ءلـ و س ع ص (شكل ٢٢ لوحة ٥) نجد انه بموجب طريقة الحل المذكورة كان يلزم قطع المستويين المذكورين بمستوافقى كالمستوى آ تَ فيقطعهما فى المستقيمين المنسقطين افقيا على ا ح و ب ى وتكون نقطة تقاطع هذين المسقطين مسقطا افقيا لنقطة من خط التقاطع .... الخ ولكن من حيث انه من الجائز ان المسقطين

الافقيين لمستقيمى التقاطع لا يتقاطعان كانت المستويين الا فى نقطة موجودة خارج حدود الرسم كما حصل ذلك فى المسقطين اد , ىى وغيرهما مما هو موجود فى (شكل ٢٢ لوحه ٥) فحينئذ يكون الحل بهذه الكيفية غير ممكن فى هذا الوضع وما يماثله ولذا التزمت بأن اذكر لذلك طريقة كافية يمكن استعمالها دائما وهى الآتية

اذا أريد ايجاد خط تقاطع المستويين م ۞ ك , س ع ص (شكل ٢٣ لوحه ٥) اللذين اثراهما متقاطعة بعيدا جدا عن حدود الرسم يقال لاجل ايجاد المسقط الرأسى لخط التقاطع نقطع المستويين المعلومين م ۞ ك , س ع ص بمستو مساعد مار بخط الارض غ ض ومائل على المستوى الافقى بزاوية صغيرة جدا لانه اذا مر مستو بهذه الصورة صار من المحقق انه يقطع المستويين المعلومين فى مستقيمين قريبين جدا من المستوى الافقى وعليه فيتحقق تقاطع مسقطيهما الرأسيين قريبا جدا من خط الارض أى داخل حدود الرسم ولتحديد هذا المستوى المساعد تؤخذ نقطة مثل (ا , آ) حيثما اتفق لكنها قريبة جدا من المستوى الافقى ويتوهم مرور المستوى المذكور بها وبخط الارض غ ض ثم نبحث عن خطى تقاطع هذا المستوى بمستويى م ۞ ك , س ع ص ولذلك يمر بنقطة (ا , آ) مستو مساعد مواز للمستوى الرأسى كالمستوى الذى أثره الافقى وهو ۿاو مار بالمسقط الافقى ا للنقطة ومواز لخط الارض فهذا المستوى يقطع المستوى م ۞ ك فى مستقيم مثل (ۿاو , ۿَۿَ) ويقطع المستوى المساعد الاول أعنى المار بخط الارض وبالنقطة (ا , آ) فى مستقيم مواز لخط الارض كالمستقيم (ۿ او , لا آ لا) وهذا المستقيم يتقاطع مع المستقيم الاول فى نقطة تنسقط رأسيا فى نقطة ل التى هى نقطة تقابل مسقطيهما الرأسيين وتكون تلك النقطة احدى نقط خط تقاطع المستوى م ۞ ك بالمستوى {غ ض (ا , آ)} وعليه يكون خط التقاطع المذكور منسقطا رأسيا على خط ۞ ل ح الغير المحدود ثم يبحث بمثل ذلك عن خط تقاطع المستوى {غ ض (ا , آ)} المساعد مع المستوى الايسر س ع ص فيوجد انه هو المنسقط رأسيا على ع لَ ح الذى يقطع المستقيم الاول ۿ ل ح فى نقطة مثل نقطة ح التى تكون احدى نقط المسقط الرأسى لخط تقاطع المستويين الاصليين م ۞ ك , س ع ص ومن المحقق ان نقطة ح لابد وان تقع داخل حدود الرسم حيث

أخذ

أخذ المستوى الساعد {غ ض(ا و اَ)} مائلا على المستوى الافقى بميل صغير جدا ثم لاجل ايجاد نقطة ثانية من المسقط الرأسى لخط التقاطع خلاف نقطة ع يمرر أيضا مستو مساعد آخر بخط الارض وبنقطة اخرى كنقطة (ب و بَ) أعلى او أوطى بقليل من النقطة الاولى (ا و اَ) التى مر بها المستوى الساعد الاول وبعد ذلك يبحث عن خطى تقاطع المستوى الساعد الجديد الذى هو {غ ض(ب و بَ)} بالمستويين الاصليين كما بحث عن خطى تقاطعهما بالمستوى الساعد الاول فبوجدان المسقطين الرأسيين لهما عبارة عن مستقيمى هـ ط و عَ ط المتقاطعين فى نقطة ط التى تكون كما تقدم نقطة ثانية من المسقط الرأسى لخط التقاطع المطلوب فاذا وصل منها الى النقطة التى وجدت من قبل بمستقيم مثل ط ع كان هو المسقط الرأسى لخط تقاطع المستويين م هـ ك و س ع ص الاصليين بحيث لومد ع ط على استقامته لتقاطع مع الاثرين هـ م و ع س فى نقط واحدة

واما المسقط الافقى لخط التقاطع فانه يتعين كما عين المسقط الرأسى بأن تؤخذ المستويات المساعدة مارة بخط الارض أيضا ومائلة على المستوى الرأسى للمسقط بزوايا صغيرة جدا وذلك كالمستويين {غ ض (د و دَ)} و {غ ض (ذ و ذَ)} ويجرى عليها كما أجرى على امثالها فيتحصل المسقط الافقى ى ن لخط التقاطع المطلوب الذى يلزم ان يتقابل مع هـ ك و ع ص فى نقطة واحدة وفى التأمل فى الشكل ما يغنى عن التطويل فى الشرح

بند ٤٥ المطلوب ايجاد نقطة تقاطع ثلاثة مستويات معلومة مع بعضها

لنفرض مثلا ان الثلاثة مستويات المعلومة هى م هـ ك و س ع ص و ح ط ى (شكل ٢٤ لوحه ٥) ويراد ايجاد نقطة تقاطعها مع بعضها فلذلك يبحث عن خطى تقاطع احد المستويات المذكورة وليكن م هـ ك مع المستويين الآخرين س ع ص و ح ط ى فنجدهما بمقتضى ما تقدم فى بند ٣٨ عبارة عن المستقيمين (ا ب و اَ بَ) و (د ى و دَ ىَ) وعلى هذا تكون نقطة تقاطع هذين المستقيمين وهى (هـ و هَ) نقطة تقاطع المستويات الثلاثة المعلومة وهذا أمر بديهى اذ أن هذه النقطة هى المشتركة وحدها بين كل من الثلاثة المستويات المذكورة

بند ٤٦ المطلوب ايجاد نقطة تقابل مستقيم مثل (ا ب و اَ بَ) (شكل ٢٥ لوحه ٥)

يستومعلوم كالمستوى م ه ك

لذلك يمرر بالمستقيم (ا ب و آ بَ) مستو حيثما اتفق قاطع للمستوى المعلوم ويبحث عن خط تقاطعهما ببعضهما وحيث ان خط التقاطع المذكور يلزم ان يكون بالضرورة مارا بالنقطة المطلوبة فتكون هى نقطة تقابله بالمستقيم المعلوم (ا ب و آ بَ) ولاجل تمرير المستوى القاطع بالمستقيم المعلوم (ا ب و آ بَ) نبحث عن أثرى المستقيم المذكور بمقتضى بند فنجدان أثره الراسى نقطة بَ وأثره الافقى نقطة ح وحيث ان أثرى المستوى الذى يراد تمريره يلزم ان يكونا مارين بأثرى المستقيم المعلوم اللذين هما ح و بَ فيمد من الاثر الافقى ح مستقيم حيثما اتفق مثل ح ع ص و يعتبر أثرا افقيا للمستوى المطلوب ثم يوصل من نقطة ع الى الاثر الراسى بَ مستقيم مثل ع بَ س فيكون هو الاثر الراسى للمستوى المذكور وحينئذ يبحث عن خط تقاطع هذا المستوى الجديد س ع ص بالمستوى م ه ك المعلوم فيوجد انه كناية عن المستقيم (ه و و هَ وَ) وهذا المستقيم متلاق مع المستقيم (ا ب و آ بَ) فى نقطة (ط و طَ) التى تكون هى نقطة تقابل المستقيم المعلوم بالمستوى م ه ك المعلوم أيضا ولاجل زيادة الايضاح قد اعتبرنا ان المستوى م ه ك له وجود حقيقى فى الفراغ فصار الجزء (ا ط و آ طَ) هو الجزء المشاهد فقط من المستقيم الكلى (ا ب و آ بَ) لكونه فوق المستوى م ه ك ولذا قد بيناه بخطوط كاملة واما الجزء الذى تحت نقطة (ط و طَ) فلكونه مخبأ بالمستوى م ه ك قد رسم نقطيا بحسب الاصطلاح الذى اتفقنا عليه فيما تقدم ببند ٢٣ ويمكن أيضا ان يمرر بالمستقيم المعلوم المستوى المسقط له افقيا عوضا عن ان يمرر به مستو حيثما اتفق وبيان ذلك موضح فى (شكل ٢٦ لوحه ٦) وطريقته هى ان يمرر بالمستقيم المعلوم (ا ب و آ حَ) المستوى ا ب بَ المسقط له أفقيا الذى ينطبق بالضرورة أثره الافقى على المسقط الافقى ا ب من المستقيم المعلوم وأثره الراسى ب بَ يكون عموديا على خط الارض فاذا بحث بعد ذلك عن خط تقاطع هذا المستوى المسقط ا ب بَ بالمستوى المعلوم م ه ك وجد ان خط التقاطع المذكور مسقط افقيا على د ب ورأسيا على دَ بَ الذى يقطع المسقط الراسى للمستقيم المعلوم وهو آ حَ فى نقطة طَ فتكون هذه النقطة مسقطا رأسيا النقطة التقابل المطلوبة فيبحث عن مسقطها الافقى ط بمقتضى ماتقدم وقد اعتبرنا فى رسم (الشكل ٢٦ لوحه ٦) ان المستوى م ه ك موجود فى الفراغ وبينا الظاهر والمخبأ من المستقيم المعلوم كلا بما

يليق

يليق به كما فعلنا في الحل الاول لهذه المسئلة

وأخيرا يمكن ان يمر بالمستقيم المعلوم المستوى المسقط له رأسيا ويكون العمل مشابها بالكلية لما تقدم في حالة ما اذا مر به المستوى المسقط له أفقيا انظر (شكل ٢٦ لوحه ٦) تجد العمل واحدا

بند ٤٧ (في المساقط المساعدة) من المعلوم أنه حينما يكون المستوى المسقط افقيا المستقيم ما عموديا على خط الارض يكون هذا المستوى بالضرورة عموديا أيضا على المستوى الرأسي للمسقط أعني يكون هو والمستوى المسقط رأسيا للمستقيم المعلوم كما انه مسقط له افقيا وعلى هذا يكون أثرا هذا المستوى على مستويي المسقط موجودين على مستقيم واحد عمودي على خط الارض هو عبارة عن مجموع مسقطي المستقيم الفراغي الاصلي على مستويي المسقط المذكورين وقد تقدم في بند ان كل مسقطين بهذه الصورة هما غير كافيين لتعيين وضع المستقيم الفراغي المبين بهما لان المستقيم الفراغي يمكنه ان يأخذ عدة أوضاع مختلفة داخل المستوى العمودي على خط الارض المار بالمسقطين المذكورين مع بقائهما مسقطين له في أي وضع أخذه داخل المستوى المذكور

نعم انه يمكن تحديد وضع المستقيم الفراغي في مثل هذه الحالة بمعلومية مساقط نقطتين من نقطه لكن تكون هذه الطريقة غير مطابقة ولا موافقة لعمليات الهندسة الوصفية مباشرة بل بواسطة وزد على ذلك انه عندما يكون المعلوم عدة مستقيمات مهمة موجودة كلها في مستو واحد عمودي على خط الارض فان بيانها بهذه الطريقة أعني بتعيين مساقط نقطتين من كل منها مما يؤدي الى اللخبطة والارتباك في تمييز بعضها عن بعض فلجميع هذه الاسباب يستعمل على العموم مستوى مسقط مساعد خلاف المستويين الاصليين وفي الغالب يؤخذ المستوى المساعد المذكور عموديا على المستويين الاصليين ويطبق بعد ذلك على أحدهما بتدويره حول أثره عليه ولبيان هذه القاعدة نطبقها على مثال فنقول

بند ٤٨ المعلوم مستقيم مثل (اب ، اَبَ) (شكل ٢٧ لوحه ٦) بمسقطيه اب ، اَبَ على مستويي المسقط الاعتياديين اللذين خط أرضهما هو خ ض والمطلوب ايجاد مسقط ثالث مساعد للمستقيم المذكور على مستوى المسقط المساعد م ه ك العمودي على المستويين الاصليين ولذلك نسقط نقطتان اثنتان حيثما اتفق من المستقيم المعلوم على مستوي المسقط المساعد م ه ك والاحسن ان نسقط من

هذا المستقيم أثريه وهما ا َ و ب بان ننزل أولا من نقطة اَ عمودا على المستوى م ه ك كالعمود اَ ا َ الذي لايخرج بالضرورة عن المستوى الرأسي للمسقط الاصلي وبعد حتى يقابل خط م ه في نقطة اَ التي تكون حينئذ مسقطا مساعدا ثالثا لنقطة اَ ثم ننزل من نقطة ب العمود ب ب على المستوى م ه ك فلا يخرج هذا العمود عن المستوى الافقي للمسقط بل يقابل مستوى م ه ك في نقطة مثل نقطة ب من الاثر ه ك فاذا دورالآن المستوى م ه ك حول أثره الرأسي م ه حتى ينطبق على المستوى الرأسي للمسقط رأينا ان أثره الرأسي م ه ونقطة اَ الموجودة عليه يبقيان ثابتين واما أثره الافقي ه ك فانه ينطبق بعد الدوران على ه خ وكذا نقطة ب ترسم القوس ب تَ وتصير بعد الحركة في نقطة تَ وعلى هذا يكون المستقيم اَ تَ هو المسقط المساعد الثالث للمستقيم المعلوم (ا ب و اَ بَ)

بند ٤٩ (مثال آخر) من المعلوم انه اذا فرض مثلث في الفراغ وكان مستويه عموديا على خط الارض آل مسقطا هذا المثلث الى مستقيمين عمودين على خط الارض وموجودين على استقامة واحدة وعلى هذا فيمكن اعتبار خطي ا ب ح و اَ تَ (شكل ٢٨ لوحه ٦) مسقطين لمثلث فراغي رؤسه منسقطة أفقيا في ا و ب و ح أما على المستوى الرأسي فحيث قد فرض ان رأسيه المنسقطتين افقيا في ا و ح متساويتا العلو عن المستوى الافقي فتنسقطان راسيا على نقطة واحدة مثل اَ ورأسه الثالثة تنسقط وحدها على نقطة اخرى كنقطة تَ بحيث يكون المثلث مبيناهكذا (ا ب ح و اَ تَ) لكن اذا تأملنا نجد ان هذين المسقطين غير كافيين لتعيين وضع أجزاء المثلث من أول وهلة حيث ان جميع اضلاعه منسقطة افقيا على اتجاه خط ا ب ح ورأسيا على خط اَ تَ فلاجل تعيين اجزاء هذا المثلث وظهور هيئته الحقيقية نسقطه على مستوى مسقط ثالث مساعد مثل م ه ك عمودي على خط الارض ثم نديره هذا المستوى بما فيه المسقط الجديد للمثلث حول أثره الرأسي حتى ينطبق على المستوى الرأسي للمسقط ولاجل اسقاط المثلث (ا ب ح و اَ تَ) على المستوى م ه ك ينزل من جميع رؤسه مستقيمات عمودية على المستوى المذكور مثلا العمود النازل من الرأس (ب و تَ) ينسقط افقيا على ب ب ورأسيا على تَ تَ بحيث تكون نقطتا ب و تَ كنايه عن المسقطين الافقي والرأسي لمسقط نقطة (ب و تَ) الاصلية على المستوى م ه ك وبمثل ذلك نجد ان

مسقطي

مسقطى مسقط نقطة (ا و اَ) عبارة عن (اٍ و اٍَ) ومسقطى مسقط نقطة (ح و اَ)
عبارة عن (حٍ و اٍَ) فاذا توهمنا دوران المستوى م ه ك حول أثره الرأسى م ه حتى
ينطبق على المستوى الرأسى للمسقط دارت معه النقط الثلاث (ب و بَ) و (اٍ و اٍَ)
و (حٍ و اٍَ) فترسم فى اثناء دورانها اقواسا افقية تنسقط افقيا على اقواس مثلها
كالاقواس ب ب٢ و اٍ ا٢ و حٍ ح٢ الموجودة فى المستوى الافقى وتنسقط هذه الاقواس
رأسيا على مستقيمى بَ تَ و اٍَ اً الموازيين الى خط الارض بحيث متى انطبق المستوى
المتحرك والنقط الثلاث الموجودة فيه على المستوى الرأسى صارت المساقط الافقية
لهذه النقط موجودة فى محلات تقاطع المساقط الافقية للاقواس المرسومة بها مع خط
الارض أعنى فى ب٢ و ا٢ و ح٢ فاذا اقيم منها اعمدة على خط الارض تقابلت مع
خطى بَ تَ و اٍَ اً فى النقط تَ و اً و حً التى اذا وصل بينها بمستقيمات تحصل
مثلث تَ اً حً هو كناية عن مسقط المثلث (ا ب ح و اَ بَ حَ) الاصلى على مستوى م ه ك
منطبقا على المستوى الرأسى للمسقط أعنى هو المسقط الثالث المساعد المطلوب

وقد بينا أيضا فى الشكل ٢٨ كيفية العمل فى حالة ما يصير تدوير المستوى المساعد
مَ هَ كَ حول اثره الافقى هَ كَ حتى ينطبق على المستوى الافقى ولكون العمل مشابها
بالكلية لما تقدم فى الحالة الاولى قد اكتفينا ببيانه بالرسم فقط فالتأمل فى عين
الشكل كاف

بند استعمال المساقط المساعدة لا ينفع فقط فى تعيين أوضاع الخطوط التى لا يكفى
لتعيينها مسقطان اثنان بل ينفع أيضا لحل بعض مسائل لا يمكن حلها بدون استعمالها
أو يمكن حلها بدونه لكن يكون الحل به أقرب ولنورد هنا بعض المسائل التى من هذا
القبيل ونعطى كيفية حلها باستعمال المساقط المساعدة

المطلوب تعيين اثرى مستقيم مار بنقطتين معلومتين وموجودتين فى مستو عمودى على
خط الارض

(شكل ٢٩ لوحه ٧) لنفرض ان النقطتين المعلومتين هما (ا و اَ) و (ب و بَ)
الموجودتان فى المستوى م ه ك العمودى على خط الارض فلاجل تعيين أثرى المستقيم
المار بهما الذى مسقطاه متحدان مع أثرى المستوى م ه ك يقال لا شك ان الاثرين

المذكورين هما نقطتا تقابل المستقيم الفراغى مع أثرى المستوى م هـ ك الشامل له حينئذ اذا دور المستوى م هـ ك باعتباره كمستوى مسقط مساعد حول أثره الافقى لينطبق على المستوى الافقى دارت معه نقطتا (ا و اَ) و (ب و بَ) وانطبقتا فى اً و بً كما فى (بند ٤٩) اما اثرا المستوى م هـ ك فان أحدهما وهو هـ ك يبقى ثابتا فى محله والثانى وهو م هـ ينطبق على الجزء هـ غ من خط الارض وعلى هذا اذا رسم المستقيم اً بً ومد الى ان يقابل هـ ك فى نقطة مثل ح فتكون هى أثره الافقى ثم مد من جهته الاخرى الى ان يقابل خط الارض فى نقطة ءِ فتكون هى أثره الرأسى منطبقا معه فى المستوى الافقى فينبغى ايجاد وضعه الحقيقى بأن يرد المستوى م هـ ك الى وضعه الاصلى فتعود نقطة ءِ الى نقطة ء التى تكون هى الاثر الرأسى الحقيقى للمستقيم المار بالنقطتين المعلومتين

بند المطلوب ايجاد خط تقاطع مستويين ما افقى مثل س ع ص (شكل ٣٠ لوحه ٧) بمستو آخر مار بخط الارض وصانع مع المستوى الافقى زاوية معلومة رمزها ل لذلك يقال حيث ان أثرى المستوى المار بخط الارض ليسا ظاهرين لكونهما منطبقين على خط الارض المذكور فيتخذ مستوى مسقط مساعد كالمستوى م هـ ك عموديا على مستويى المسقط الاصليين ونتوهم دورانه حول أثره الرأسى حتى ينطبق على المستوى الرأسى فيكون الاثر الجديد للمستوى س ع ص أعنى اثره على المستوى م هـ ك كناية عن ب ا وأما اثر المستوى المار بخط الارض على المستوى م هـ ك بعينه فهو مستقيم كالمستقيم هـ ح المار من نقطة هـ وصانع مع خط الارض زاوية تساوى لزاوية ل وهذا الاثر يتقاطع مع الاثر الاول ب ا فى نقطة مثل ءَ تكون هى بالضرورة نقطة من خط التقاطع المطلوب لكونها مشتركة بين المستويين المتقاطعين فاذا توهمنا رجوع المستوى الى أصله صارت النقطة المذكورة فى الوضع (ء و ءَ) و بما ان نقطة ع هى نقطة مشتركة بين المستويين المعلومين أيضا فتكون هى احدى نقط خط تقاطعهما الذى يكون بناء على ذلك هو المستقيم (ع ء و عَ ءَ)

فاذا كان المستوى المار بخط الارض معينا بمعلومية نقطة منه امكن أيضا حل المسئلة بالطريقة بعينها لكن الاسهل اتباع طريقة حلها التى ذكرت ضمن المسئلة المندرجة فى بند ٤٤

بند ٥٢

بـ٥٢ـد المطلوب ايجاد نقطة تقابل مستوحيثما اتفق مثل سَ ع صَ
(شكل ٣١ لوحه ٧) بمستقيم موجود فى مستو عمودى على خط الارض ومعين الوضع
بمعلومية نقطتين من نقطه كالنقطتين (ا و اَ) و (ب و بَ)
لذلك يطابق المستوى م هـ ك الشامل للمستقيم المعلوم على المستوى الرأسى بتدويره
حول أثره الرأسى م هـ مع اعتباره كمستوى مسقط مساعد و بحث كما تقدم عن انطباق
كل من الاثر الجديد للمستوى المعلوم والمستقيم المعلوم على المستوى الرأسى فيوجد ان الاثر
الجديد للمستوى سـ ع صـ هو ى ج وان المستقيم المعلوم المار بنقطتى (ا و اَ)
و (ب و بَ) قد انطبق وصار فى الوضع اَ بَ وهذا المستقيم متقاطع مع الاثر ى ج
فى نقطة هَ التى تكون هى نقطة التقابل المطلوبة انما يلزم ايجاد وضعها الحقيقى
بترجيع المستوى المنطبق الى وضعه الاصلى فترجع معه وتأخذ وضعها الحقيقى
(هـ و هَ) وهو المطلوب
(تنبيه) اعلم ان مستوى القطاع الذى استعملناه فى (بـ٤٢ـد) (شكل ٢١ لوحه ٤)
لايجاد خط تقاطع مستويين آثارهما موازية لخط الارض يعد كمستوى مسقط مساعد

(فى المستقيمات والمستويات المتعامدة)

بـ٥٣ـد (نظريه) اذا كان مستقيم فراغى مثل اب (شكل ٣٢ لوحه ٧) عموديا على
مستو فراغى مثل م هـ ك ل فمسقطا هذا المستقيم يكونان عمادين على أثرى المستوى
النظير على نظيره بمعنى ان المسقط الافقى اَ بَ يكون عموديا على الاثر الافقى هـ ك
والمسقط الرأسى اً بً على الاثر الرأسى هـ م
وذلك لان المستوى ا ب بَ اَ لما كان هو المستوى المسقط افقيا للمستقيم الفراغى
على اَ بَ فهو حينئذ عمودى على المستوى الافقى هذا ولكون المستقيم اب عموديا
على المستوى الفراغى م هـ ك ل بالفرض فيكون حينئذ المستوى ا ب بَ اَ المار به
عموديا أيضا على المستوى م هـ ك ل اذا تقرر هذا يقال حيث اتضح ان كلا من المستوى
الافقى للمسقط والمستوى م هـ ك ل عمودى على المستوى ا ب بَ اَ المسقط افقيا
للمستقيم الفراغى فيكون خط تقاطعهما وهو هـ ك الذى هو كناية عن الاثر الافقى
للمستوى م هـ ك ل عموديا على المستوى ا ب بَ اَ وحيث ذلك فيكون عموديا على
خط اَ بَ المار بموقعه والموجود فى المستوى المذكور و بذا يثبت المطلوب من ان
المسقط الافقى اَ بَ يكون عموديا على الاثر الافقى هـ ك وبمثل هذا يبرهن على ان
اً بً عمودى على هـ م

وبالعكس اذا كان المسقطان أَتَ و أَتَ للمستقيم الفراغي اب عموديين على الاثرين هك و هم من المستوى الفراغي م هك ل أقول ان المستقيم الفراغي اب عمودي على المستوى الفراغي م هك ل وذلك لان المستوى المسقط الذي أثره أَتَ هو بالضرورة عمودي على المستقيم هك وبالتبعية لذلك يكون عموديا أيضا على المستوى م هك ل المشتمل على هذا المستقيم وكذا من حيث ان المستوى المسقط الذي أثره أَتَ عمودي على المستقيم هم فيكون عموديا على المستوى م هك ل المار به وبناء على ذلك يكون هذا المستوى الاخير عموديا على كل من المستويين المسقطين في آن واحد ومن ثم يكون عموديا على خط تقاطعهما الذي هو كناية عن المستقيم المعلوم في الفراغ وهذا هو ما أردنا بيانه

(تنبيه) ليعلم ان هذه النظرية وعكسها لا يكونان صحيحين الا اذا كانت المساقط عمودية أعني صار تعيينها بمستقيمات مسقطة اتجاهها عمودي على مستويات المسقط فيعلم من ذلك انها لا تكون صحيحة في حالة ما تكون المساقط مائلة وأيضا ينبغي الاحتراس من ان يتوهم ان الارتباط الموجود في هذه النظرية له مثيل فيما بين مستقيمين فراغيين متعامدين على بعضهما لان مساقطهما العمودية لا تكون متعامدة الا اذا كان احد المستقيمين الفراغيين بالاقل موازيا لمستوى المسقط

(نتيجة) اذا أريد انزال مستقيم عمودي من نقطة معلومة على مستو معلوم ينزل من مسقطي النقطة المعلومة مستقيمان عمادان على أثري المستوى فيكونان هما مسقطا المستقيم العمودي على المستوى الذي اريد انزاله

بحث المعلوم نقطة مثل (ا و اَ) (شكل ٣٣ لوحه ٨) والمطلوب امرار مستو عمودي بها على مستقيم معلوم أيضا كالمستقيم (ب ح و بَ حَ)

لذلك يمرر من النقطة (ا و اَ) احد افقيات المستوى المطلوب أعني مستقيما موازيا لاثره الافقي فيكون مسقطه الافقي مستقيما موازيا الى الاثر الافقي للمستوى المطلوب ومارا بمسقطها الافقي ا وبما ان الاثر الافقي للمستوى المطلوب سيكون عموديا على المسقط الافقي ب ح للمستقيم المعلوم فينزل حينئذ العمود اء على ب ح فيكون اء هو المسقط الافقي لافقي المستوى المطلوب اما مسقطه الرأسي فهو المستقيم اَ ءَ الموازي لخط الارض والمار بنقطة اَ فاذا بحثنا عن الاثر الرأسي للمستقيم (اء و اَ ءَ) وجدناه في نقطة ءَ فينزل منها العمود م ءَ هـ على بَ حَ فيكون هو الاثر الرأسي للمستوى

للمستوى المطلوب ثم لاجل رسم أثره الافقى ينزل من نقطة ﻫ عمود على ب ح كالعمود ﻫك فيكون هو الاثر الافقى للمستوى المطلوب ويمكن ان يمرر بنقطة (ا و اَ) مستقيم مثل (اﻫ و اَﻫَ) احد رأسيات المستوى المطلوب عوضا عما مرر بها من احد افقياته والعمل مشابه لما تقدم

بند اذا فرض فى المسئلة السابقة ان المستقيم المعلوم موجود فى مستوعمودى على خط الارض كالمستقيم المار بنقطتى (ا و اَ) و (ب و بَ)(شكل ٣٤ لوحه ٨) وان النقطة المعلومة هى (ح و حَ) ففى هذه الحالة لايمكن اتباع طريقة الحل التى استعملت فى البند السابق بل يعتبر المستوى م ﻫ ك المسقط للمستقيم المعلوم كمستوى مسقط مساعد ويطبق على المستوى الراسى ويبحث عن المسقط الجديد لكل من النقطة والمستقيم المعلومين فيوجد ان مسقط نقطة (ح و حَ) على المستوى المساعد بعد تطبيقه هو نقطة حً ومسقط المستقيم المعلوم عليه بعد تطبيقه أيضا هو اً بً فاذا تقرر هذا يقال اذا صرفنا النظر موقتا عن المستوى الافقى للمسقط واعتبرنا ان مستوى المسقط الجديدين هما المستوى الرأسى الاصلى والمستوى م ﻫ ك المساعد فيكون المستقيم م ﻫ ك خط أرض لهما وتؤل المسئلة الى أن المعلوم نقطة فراغية مثل (حَ و حً) مسقطاها على مستوى المسقط الجديدين ومستقيم مثل (اَ بَ و اً بً) موجود فى مستوى المسقط م ﻫ ك المنطبق والمطلوب من النقطة المذكورة مد مستوعمودى على المستقيم (اَ بَ و اً بً) ولاشك أنه يكفى لحل المسئلة بعد ان آلت الى هذا المنطوق أن يرسم من نقطة حً مستقيم مثل ى حً ﻫ عمودى على اً بً فيكون هو أثر المستوى المطلوب على مستوى المسقط المساعد ثم يقام من نقطة تقابله بخط الارض المستعار وهى نقطة ى عمود مثل ى و على خط الارض المذكور فيكون هو أثر المستوى المطلوب على المستوى الرأسى للمسقط فاذا توهمنا قيام المستوى المنطبق رجعت نقطة ﻫ الى نقطة مثل ىَ عد منها عمود على المسقط الافقى الاصلى للمستقيم المعلوم كالعمود ىوَ فيكون هو الاثر الافقى للمستوى المطلوب

بند المطلوب ايجاد البعد الاصغر بين نقطة مثل (ا و اَ) ومستو مثل م ﻫ ك (شكل ٣٥ لوحه ٨)

لذلك ينزل أولا من نقطة (ا و اَ) عمود غير محدود على المستوى م ﻫ ك المعلوم بأن يؤخذ مسقطاه ا ب و اَ بَ عموديين على اثريه ﻫ ك و ﻫ م كل على نظيره

ذلك بمقتضى النقيجة المقررة فى (بـ٥٣ـد) ثم يبحث عن نقطة تقابل هذا العمود بالمستوى
مهك بمقتضى ما تقدم فى (بـ٤٦ـد) فنجدها نقطة (ـب و بَ) ويكون حينئذ
لمستقيمان اب و أبَ هما مسقطا البعد الاصغر المطلوب أما حقيقته فتتعين كما
قدم فى (بـ٢٧ـد) بعد الافق وبَهـ مساويا الى اب ووصل الوتر آهـ فيكون هو
حقيقة البعد الاصغر بين نقطة (ا و آ) والمستوى مهك

بـ٥٧ـد (شكل ٣٦ لوحه ٨) المطلوب ايجاد البعد الاصغر بين نقطة مثل
(ا و آ) ومستقيم مثل (بح و بَحَ)

ذلك بجرر أولا من النقطة المعلومة (ا و آ) مستو عمودى على المستقيم (بح و بَحَ)
ويبحث عن نقطة تقابله بالمستقيم المذكور وبعد ايجادها نصل منها الى النقطة المعلومة
بمستقيم فيكون هو البعد الاصغر المطلوب ولاجل تمرير المستوى العمودى على المستقيم
(بح و بَحَ) من نقطة (ا و آ) يمرر بها طبقا لما تقرر فى (بـ٥٤ـد) أفق
كالافق (اى و آىَ) من ضمن افقيات المستوى المطلوب ومن أثره الرأسى ىَ يمرر
الاثر الرأسى سىَع للمستوى المذكور عموديا على بَحَ ثم يرسم أثره الافقى ع صه
عموديا على بح ثم نبحث بمقتضى (بـ٤٦ـد) عن نقطة تقابل المستوى سع صه
بالمستقيم (بح و بَحَ) فنجدها نقطة مثل (هـ و هَ) فاذا وصل منها الى نقطة
(ا و آ) بمستقيم مثل (اهـ و آهَ) كان هذا المستقيم موجودا بالطبيعة داخل
المستوى سع صه وبناء على ذلك يكون عموديا على (بح و بَحَ) وبه يقدر البعد
الاصغر المطلوب اما حقيقة هذا البعد وهى اط فانها تتعين بمقتضى (بـ٢٧ـد) بواسطة
المسقطين اهـ و آهَ

اعلم انه لداعى كون المستوى سع صه فى الشكل الحاضر ليس من معالم المسئلة
الاصلية ولا من نتائجها بل هو فقط وسيلة للوصول الى الحل قد رسم اثراه من جنس
الخطوط المساعدة المهمة طبقا لما تقرر فى (بـ٢٣ـد)

بـ٥٨ـد (شكل ٣٧ لوحه ٩) حل آخر للمسئلة نفسها اذا أريد ايجاد البعد
الاصغر بين نقطة مثل (ح و حَ) ومستقيم مثل (اب و آبَ) يمرر أولا بهما مستو
ولذلك يكفى أن نصل من نقطة (ح و حَ) الى احدى نقط المستقيم (اب و آبَ)
ولتكن نقطة (ا و آ) مثلا بمستقيم مثل (اح و آحَ) ثم نبحث عن الاثرين
الرأسيين لكل من المستقيم المذكور والمستقيم المعلوم (اب و آبَ) فيكون خطا

بَدم

تَ ءَ م و م ا عبارة عن أثرى المستوى الساعد الذى أريد تمريره بالنقطة والمستقيم المعلومين ثم نطبق المستوى تَ م ا على المستوى الافقى بتدويره حول أثره الافقى ام لكن نفرض أنه يجذب معه فى أثناء دورانه كلا من النقطة والمستقيم المعلومين ومن المعلوم أنه فى أثناء هذه الحركة لا تخرج نقطة (ب و تَ) عن المستوى الرأسى ب ه العمودى على محور الدوران ام ولا ريب ان بعد هذه النقطة عن النقطة الثابتة م أعنى البعد تَ م لا يحصل له أدنى تغير بل يبقى طوله ثابتا وبناء على ذلك اذا رسم بنصف القطر م تَ قوس دائرة يقطع خط ب ه فى نقطة مثل تً فتكون هذه النقطة هى منطبق نقطة (ب و تَ) وكذا يكون المستقيم ا تً منطبق المستقيم المعلوم والمستقيم م تً منطبق الاثر الرأسى م تَ للمستوى تَ م ا وبمثل ذلك اذا مد العمودان دً و ح دً على المحور ام شوهد ان المستقيم (ا ح د و ا حَ دَ) ينطبق فى ا دً وان نقطة (ح و حَ) تنتقل الى نقطة حً فاذا تقرر هذا يقال حيث ان جميع معالم المسئلة صارت منطبقة على المستوى الافقى بدون حصول أدنى تغير فى أوضاعها المتناظرة فيمكن أن ينزل على ا تً عمود مثل حً لً فيكون هو البعد الاصغر المطلوب مبينا بطوله الحقيقى ولا يخفى ان الطول الحقيقى هو الذى معرفته تكون فى العادة أهم ومع ذلك اذا أريد تعيين وضع هذا البعد الاصغر فلا يبقى سوى أن ترفع الجملة المنطبقة الى وضعها الاصلى فترجع نقطة لً الى ل بعمود على محور الدوران ام ثم يعين مسقطها الرأسى لَ بعمود على خط الارض وأخيرا يكون البعد الاصغر منسقطا على كل من المستقيمين ح ل و حَ لَ

بعد استعمال هذا الحل الاخير يكون ضروريا فى حالة ما اذا أريد ايجاد نقطة على المستقيم (ا ب و اَ تَ) تكون متباعدة عن نقطة (ح و حَ) بكمية معلومة ك مثلا لانه يكفى لذلك من بعد تطبيق كل من النقطة والمستقيم المعلومين فى حً وفى ا تً أن يرسم قوس دائرة مثل غً غً بنصف قطر حً غً = ك فيقطع المستقيم ا تً فى نقطة مثل غً فتكون هى النقطة المطلوبة لكنها فى حالة انطباق ثم يرفع الجملة حول محور الدوران ام ترجع نقطة غً الى نقطة مثل غ ويكون مسقطاها هما غ و غَ ومن المشاهد انه يوجد على المستقيم ا تً نقطة ثانية خلاف نقطة غً تحل المسئلة وذلك لانه لما كان القوس غً غً قاطعا للمستقيم المذكور فى نقطة ثانية مثل غً فتكون هذه النقطة حلا آخر للمسئلة

بند ٦٠ (زوايا ميل المستقيمات والمستويات على بعضها) من المعلوم ان كل مستقيمين فراغيين لا يمكنهما ان يشغلا بالنسبة لبعضهما بعضا سوى أوضاع ثلاثة الاول ان يكونا متقاطعين مع بعضهما تقاطعا حقيقيا وفي هذه الحالة يطلق على الزاوية الواقعة بينهما اسم زاوية ميل أحدهما على الآخر والوضع الثاني أن يكونا غير موجودين في مستو واحد أعني لا متقاطعين ولا متوازيين ففي هذه الحالة لا يكون بين المستقيمين المذكورين زاوية حقيقية واغا صار الاتفاق على أن يعطى اسم زاوية ميلهما على بعضهما الى الزاوية الواقعة بين مستقيمين موازيين لهما على التناظر وممدودين من نقطة واحدة فراغية والوضع الثالث أن يكونا متوازيين وفي هذه الحالة لا يكون بينهما زاوية ميل بالكلية فلنتصدى حينئذ للكلام على كيفية ايجاد زاوية ميل مستقيمين معلومين بمساقطهما في حالة ما يكونان متقاطعين أو غير موجودين في مستو واحد فنقول

(شكل ٣٨ لوحه ٩) المعلوم مستقيمان مثل (اب و اَبَ) و (حد و حَدَ) متقاطعين في نقطة مثل (هـ و هَ) والمطلوب ايجاد زاوية ميل أحدهما على الآخر لذلك يقال اذا بحثنا عن الاثرين الافقيين للمستقيمين المعلومين ووجدنا انهما ب و د ثم وصلنا بينهما بخط مستقيم مثل ب د رأينا ان هذا المستقيم قاعدة لمثلث رأسه هي نقطة تقاطع المستقيمين المعلومين أعني نقطة (هـ و هَ) وزاويته التي رأسها في هذه النقطة هي الزاوية التي يبحث عنها ومن ذلك يشاهد انه كان يمكن انشاء هذا المثلث بالبحث عن أطوال اضلاعه الثلاثة بواسطة مساقطها المعلومة لكن الاصوب استعمال ارتفاع هذا المثلث ولكون ان هذا الارتفاع هو بالبداهة وتر لمثلث قائم الزاوية قاعدته هي العمود هـ ر النازل من نقطة هـ على خط ب د وارتفاعه هو الرأسي المسقط أفقيا الرأس في نقطة هـ الذي يقدر بالبعد هَو فبناء على ذلك اذا أخذ البعد و رَ =هـ ر ووصل هَرَ كان هذا المستقيم هو ارتفاع المثلث الاصلي وحينئذ اذا طبق هذا المثلث على المستوى الافقي بتدويره حول قاعدته ب د فرأسه لا تخرج عن المستوى الرأسي ر هـ العمودي على هذه القاعدة بحيث لو أخذ بالابتداء من نقطة ر على اتجاه الخط ر هـ بعد مثل ر هـَ=هَرَ ووصل خطا هـَب و هـَد حدث مثلث مثل ب هـَد هو انطباق المثلث المطلوب وزاوية رأسه وهي ب هـَد تكون عبارة عن زاوية ميل المستقيمين الاصليين (اب و اَبَ) و (حد و حَدَ) على بعضهما أعني الزاوية المطلوبة

بند ٦١

بند ٦١ (شكل ٣٩ لوحه ٩) المطلوب ايجاد زاوية ميل مستقيمين مثل ا ب و اَ بَ و (د ى و دَ ىَ) غير موجودين فى مستو واحد على بعضهما

فاولا لاجل التحقق من كون هذين المستقيمين غير موجودين فى مستو واحد ينظر لوضع مساقطهما بالنسبة لبعضهما بعضا فان وجد كما فى شكلنا هذا ان المساقط المتحدة الاسم غير متوازية أو انها متقاطعة مثنى لكن نقطة تقاطع المسقطين الافقيين ا ب و د ى ليست مع نقطة تقاطع المسقطين الرأسيين اَ بَ و دَ ىَ على عمود واحد على خط الارض علم من الشرط الاول ان المستقيمين الفراغيين غير متوازيين ومن الثانى انهما غير متقاطعين واذن هما غير موجودين فى مستو واحد

وثانيا لاجل ايجاد زاوية ميل أحدهما على الآخر يقال حيث ان هذه الزاوية هى بمقتضى تعريفها المقرر فى بند ٦١ الزاوية الواقعة بين مستقيمين متقاطعين فى نقطة حيثما اتفق وموازيين للمستقيمين الاصليين فالاصوب ان تؤخذ هذه النقطة على أحد المستقيمين المعلومين ولتكن هى نقطة (ه و هَ) من المستقيم (د ى و دَ ىَ) ثم يرسم منها مستقيم مثل (ه و و هَ وَ) موازا الى (ا ب و اَ بَ) وبذلك تؤل المسئلة الى البحث عن زاوية ميل المستقيمين (د ى و دَ ىَ) و (ه و و هَ وَ) المتقاطعين فى نقطة (ه و هَ) على بعضهما وقد سبق حل هذه المسئلة فى البند السابق فاذا طبقنا الحل المتقدم فى البند السابق على المستقيمين (د ى و دَ ىَ) و (ه و و هَ وَ) رأينا ان زاوية ميلهما على بعضهما هى الزاوية المنطبقة على حقيقتها فى وهَ ى وهذه الزاوية هى أيضا زاوية ميل المستقيمين الاصليين (ا ب و اَ بَ) و (د ى و دَ ىَ) على بعضهما

بند ٦٢ (شكل ٤٠ لوحه ٩) اذا كان أحد المستقيمين اللذين يراد البحث عن زاوية ميلهما على بعضهما أفقيا كالمستقيم (ا ب و اَ بَ) وكان المستقيم الثانى حيثما اتفق كالمستقيم (د ى و دَ ىَ) فمن حيث انه طبقا لما تقرر فى (بند ٦١) كان ينبغى البحث عن الاثرين الافقيين لهذين المستقيمين و يوصل بينهما بمستقيم فيكون هو الاثر الافقى للمستوى المار بهما وهو أيضا قاعدة المثلث ضلعاه الآخران هما المستقيمان المعلومان الى آخر ما تقرر فى البند المذكور ولكن لكون ان أحد المستقيمين المعلومين هنا وهو (ا ب و اَ بَ) افقى فلا يوجد له أثر افقى ومن المعلوم ان الاثر الافقى للمستقيم الثانى وهو ى لا يكفى وحده لرسم الاثر الافقى للمستوى المار بالمستقيمين لكن اذا نظرنا

الى كون المستقيم (اب و اَبَ) سيصير احدا فقيا فانه علمنا ان الاثر الافقى لذلك المستوى يلزم ان يكون موازيا الى المسقط الافقى اب وعلى هذا اذا رسم من نقطة ء مستقيم مثل ءو موازا الى اب كان هو الاثر الافقى للمستوى المار بالمستقيمين المعلومين ثم نتوهم دوران المستوى المذكور بما فيه المستقيمين المذكورين حول أثره الافقى ءو حتى ينطبق على المستوى الافقى فنقطة (هـ و هَـ) تنطبق فى نقطة هَـ والمستقيم (هء و هَءَ) ينطبق تبعا لذلك على هَء وأما المستقيم الافقى (اب و اَبَ) فانه ينطبق على المستقيم هَوَ المرسوم من نقطة هَـ موازيا الى الاثر ءو وعلى هذا تكون زاوية ءهَ وَ هى الزاوية المطلوبة

فاذا فرض ان كلا المستقيمين المعلومين افقى كان الامر سهلا جدا لان زاوية ميل المستقيمين الفراغيين تكون فى هذه الحالة مساوية للزاوية الواقعة بين مسقطيهما الافقيين

بند ٦٣ زاوية ميل مستقيم مثل اب (شكل ٤١ لوحه ١٠) على مستو مثل مـ ن هى الزاوية الحادة ابح التى يصنعها هذا المستقيم مع مسقطه العمودى بح على المستوى المذكور (وانما قلنا مسقطه العمودى لكيلا يتوهم ان المقصود هو المسقط المائل) فان قيل ما السبب الذى أوجب الاتفاق على تخصيص الزاوية ابح بانها من دون الزوايا التى يصنعها المستقيم الفراغى اب مع جميع المستقيمات المارة بموقعه الموجودة فى المستوى مـ ن هى التى يطلق عليها اسم زاوية ميل المستقيم اب على المستوى مـ ن قلنا ان السبب فى ذلك هو كونها أصغر من أى زاوية مثل ابء يصنعها المستقيم اب مع أى مستقيم مثل بء موجود فى المستوى وللبرهنة على ذلك يؤخذ البعدان بح و بء متساويين ويقام من نقطة ح عمود مثل حا على المستوى مـ ن فيقابل بالضرورة مستقيم اب فى نقطة مثل ا يوصل منها الى ء بمستقيم مثل اء فيحدث مثلثا ابح و ابء فيهما ضلع اب مشترك وضلعا بح و بء متساويان بالعمل لكن ضلع اح من مثلث ابح أصغر من ضلع اء من مثلث ابء لكون الاول عموديا والثانى مائلا وحينئذ تكون زاوية ابح أصغر من زاوية ابء

(نتيجة) حيث ان مثلث احب قائم الزاوية فى ح فتكون زاوية ابح متممة زاوية حاب بحيث متى علمت احداهما تعلم الاخرى ومن ذلك تؤخذ الطريقة الآتية

وهى

وهى انه لاجل ايجاد زاويه ميل مستقيم مثل اب على مستو مثل م ه يفرض على اب نقطة مثل ا وينزل منها عمود مثل اد على المستوى م ه ويبحث بمقتضى ماتقدم عن الزاوية ب اد الواقعة بين المستقيمين اب , اد فالزاوية المتممة لها تكون هى الزاوية المطلوبة ولنطبق هذه الطريقة على مثال فنقول

بند ٦٤ المطلوب ايجاد زاوية ميل مستقيم مثل (اب و اَبَ) (شكل ٤٢ لوحه ١٠) على مستو مثل م ه ك

لذلك تؤخذ بمقتضى النتيجة السابقة نقطة مثل (ح و حَ) على المستقيم (اب و اَبَ) بالاختيار وينزل منها عمود مثل (حى و حَىَ) على المستوى م ه ك ثم نبحث بمقتضى (بند ٦٠) عن الزاوية الواقعة بين مستقيمى (اب و اَبَ) و (حى و حَىَ) بأن ننزل العمود حر على امتداد ب ى ثم نأخذ بعد ل ر = حر وبعد ذلك نأخذ ر حَ = حَ رَ فتكون زاوية ب حَ ى هى زاوية ميل المستقيمين المذكورين على بعضهما وأخيرا نرسم الزاوية المتممة لهذه الزاوية بأن نعد حَ ه عموديا على حَ ى فتكون زاوية ب حَ ه هى زاوية ميل المستقيم (اب و اَبَ) على المستوى م ه ك وهو المطلوب

بند ٦٥ (شكل ٤٣ لوحه ١٠) المطلوب ايجاد زاويتى ميل مستقيم مثل (اب و اَبَ) على مستويى المسقط

قد كان يمكن حل هذه المسئلة باعتبارها كحالة خصوصية من المسئلة السابقة ولكن الاقرب والأصوب ان تحل مباشرة بملاحظة ماتقدم فى (بند ٦٣) من ان زاوية ميل المستقيم (اب و اَبَ) على المستوى الافقى ماهى الا الزاوية الواقعة بين هذا المستقيم فى الفراغ وبين مسقطه الافقى اب وحيث من المعلوم ان هذه الزاوية الاخيرة هى احدى زوايا مثلث قائم الزاوية قاعدته المستقيم اب وارتفاعه ا اَ فاذا طبق هذا المثلث على المستوى الرأسى بتدويره حول ا اَ وانطبق على مثلث ا اَ بَ مثلا علم ان زاوية ا بَ اَ هى الزاوية المطلوبة

وبمثل ذلك يقال ان زاوية ميل المستقيم (اب و اَبَ) على المستوى الرأسى هى جزء من مثلث قائم الزاوية ضلعاه هما اَبَ و ببَ فاذا طبق هذا المثلث على المستوى الافقى بتدويره حول ببَ وانطبق على مثلث ببَ أ علم ان زاوية ب اَ بَ هى زاوية ميل المستقيم على المستوى الرأسى للمسقط

بـ ٦٦ د المعلوم نقطة مثل (ا و اَ) (شكل ٤٤ لوحه ١٠) فى الفراغ والمطلوب تمرير مستقيم بها يصنع مع المستوى الافقى زاوية معلومة مثل و ومع المستوى الرأسى زاوية اخرى معلومة مثل ه

لذلك تؤخذ أولا نقطة اختيارية مثل (ب و بَ) من نقط المستوى الرأسى ويمرر بها مستقيم مثل بَ حَ بحيث يكون صانعا مع خط الارض زاوية تساوى زاوية و ثم نتوهم دوران هذا المستقيم حول الرأسى بَ ب بحيث ان نقطة أثره ترسم القوس حَ م بنصف القطر بـ حَ ففى جميع الاوضاع التى يأخذها المستقيم المتحرك اثناء حركته يكون دائما صانعا مع المستوى الافقى زاوية تساوى زاوية و فاللازم لنا حينئذ هو ان ننتخب فقط من هذه الاوضاع الوضع الذى يكون فيه المستقيم المتحرك صانعا أيضا مع المستوى الرأسى زاوية تساوى زاوية ه وحيث اننا اذا أنشأنا على المستقيم حَ بَ زاوية مثل حَ بَ ى مساوية الى ه وأنزلنا على المستقيم الغير محدود بَ ى عمودا مثل حَ ى كان بالضرورة المثلث القائم الزاوية حَ بَ ى الحادث من ذلك عين المثلث القائم الزاوية الذى يصنعه المستقيم المجهول مع مسقطه الرأسى وحينئذ اذا رسم قوس الدائرة ى دَ بنصف القطر بَ ى وأقيم من نقطة دَ عمود دَ د على خط الارض ومد حتى يتلاقى مع القوس حَ م فى نقطة مثل د كان المستقيمان د ب و دَ بَ مسقطين لمستقيم فراغى صانع مع المستوى الافقى زاوية تساوى و ومع المستوى الرأسى زاوية تساوى ه

ثم بعد ذلك يرسم من النقطة المعلومة (ا و اَ) الاصلية مستقيم مثل (ط ا ر و طَ اَ رَ) موازالى (د ب و دَ بَ) فيكون هو المستقيم المطلوب

بـ ٦٧ د (شكل ٤٥ لوحه ١١) المطلوب ايجاد زاوية ميل مستومعلوم مثل م ه ك على مستوى المسقط

قد علم من الهندسة العادية انه لاجل تقدير زاوية ميل مستويين على بعضهما يكفى قطعهما بمستو ثالث عمودى على خط تقاطعهما فتكون الزاوية الواقعة بين خطى تقاطعه بهما هى معيار الزاوية المطلوبة فعلى مقتضى ذلك يقال لنقطع المستوى م ه ك مع المستوى الافقى للمسقط بمستو عمودى على الاثر ه ك فهذا المستوى يكون رأسيا بالضرورة ويكون أثره الافقى مستقيما مثل اى عموديا على ه ك وأثره الرأسى مستقيما عموديا على خط الارض كالمستقيم ى ىَ وبناء على ذلك فهو يقطع المستوى المعلوم فى مستقيم هو الخط الواصل فى الفراغ من نقطة ا الى نقطة ىَ وهو وتر لمثلث قائم

الزاوية

الزاويه ضلعاه هما ا و , و وَ وحينئذ اذا دور هذا المثلث حول و وَ لاجل تطبيقه على المستوى الرأسى للمسقط فانه ينطبق على المثلث وَ أ و الذى تكون زاويته التى اسمها كاسمه هذا هى زاويه ميل المستوى م ھ ك على المستوى الافق

وللحصول على زاويه ميل المستوى م ھ ك على المستوى الرأسى للمسقط يقطعان بمستو حيثما اتفق انما يكون عموديا على الاثر الرأسى م ھ وذلك كالمستوى ح و ت فينشأ عنه مثلث قائم الزاويه ضلعاه هما ح و , و ت وحينئذ فمن بعد تطبيق هذا المثلث على المستوى الافق بتدويره حول ح و يؤل الى مثلث و تَ ح الذى فيه زاويه تَ عبارة عن زاويه الميل المطلوبة

(تنبيه) قد يعين غالبا المستوى فى بعض الفنون بأثره الافق ھ ك وبزاويه ميله على المستوى الافق كزاويه و مثلا وبواسطه هذه المعالم يمكن دائما بالسهولة ايجاد أثره الرأسى بواسطه مستوى القطاع ا و العمودى على ھ ك الذى يكون مشتملا على زاويه و لاننا اذا طبقنا و ا على و أ وأنشأنا زاويه و أ وَ = و ثم مددنا ضلعها أ وَ فانه يقطع الخط الرأسى و وَ فى نقطة مثل وَ تكون هى نقطة من الاثر الرأسى المجهول فيوصل منها الى نقطة ھ بمستقيم مثل م وَ ھ فيكون هو الاثر الرأسى المطلوب

بل قد لا يستعمل المستوى الرأسى للمسقط بالكلية ويطبق القطاع حول ا و بأن تعمل الزاويه و ا د = و ولاشك ان هذا كاف لبيان وضع المستوى بطريقة واضحة وضوحا كافيا ولان تستنتج منه النتائج التى يحتاج اليها ولكن اذا تأملنا نجد أن مستوى القطاع و ا د قد حل فى باطن الامر محل المستوى الرأسى للمسقط

بند ٦٨ (شكل ٥٤ لوحه ١١) المعلوم نقطة مثل نقطة (ع , عَ) والمطلوب مد مستو منها بحيث يكون صانعا مع المستوى الافق زاويه معلومة مثل و ومع المستوى الرأسى زاويه اخرى معلومة أيضا مثل ھ

فلنلاحظ أولا أن مستويى وَ و ا , ت و ح القاطعين فى المسألة المتقدمة يلزم ان يتقاطعا هما انفسهما فى مستقيم عمودى على المستوى م ھ ك وهذا المستقيم يكون بالضرورة عبارة عن البعد الاصغر بين المستوى المذكور وبين نقطة و التى هى احدى نقط خط الارض وكذلك من حيث أنه بتطبيق هذا العمود مرة بعد اخرى مع المثلثين نجد ان انطباقيه مبينان بالعمودين و ق , و قَ النازلين على وترى هذين المثلثين

فيعلم من ذلك أنه مهما كان وضع المستوى م ﻫ ك فلابد من وجود هذا الارتباط وهو ان د ﻫ = د ﻫ َ اذا تقرر هذا يقال اذا صرف النظر عن كون المستوى م ﻫ ك معلوما وكان المعلوم فقط هو زاويتا ميله على مستويي المسقط وهما و , ﻫ ثم رسمنا على خط الارض مثلثا قائم الزاوية مثل د د أ َ بحيث تكون زاويته أ َ مساوية الى و وبعد ذلك رسمنا قوس دائرة بنصف قطر مساو للعمود د ﻫ َ ثم رسمنا مستقيما مماسا لهذا القوس وصانعا مع خط الارض زاوية تساوى ﻫ كالماس ت َ ﻫ َ ح الصانع مع خط الارض زاوية ت َ = ﻫ فهذا المماس يتقاطع مع امتداد الرأسى د َ د فى نقطة مثل ح من أثر المستوى م ﻫ ك وحينئذ اذا رسم المستقيم ح ﻫ مماسا الى قوس الدائرة المرسوم بنصف القطر د أ َ ثم وصل من نقطة ﻫ الى نقطة د َ بمستقيم علم لنا اثرا مستو فراغى مائل على مستويي المسقط بقدر زاويتى و , ﻫ وحينئذ لم يبق على حل المسئلة الاصلية سوى ان يمر بنقطة (ع , ع َ) المعلومة مستو مواز الى المستوى م ﻫ ك فبتطبيق الحل المستعمل لذلك فى (بـ ٣٤ د) يتعين مستو كالمستوى س ع ص هو المستوى المطلوب

ويمكن ايضا حل هذه المسئلة بأن يرسم أولا بمقتضى (بـ ٦٦ د) مستقيم يكون صانعا مع مستويي المسقط زاويتين مثل

$$\text{و}' = ٩٠^\circ - \text{و} \quad , \quad \text{ﻫ}' = ٩٠^\circ - \text{ﻫ}$$

ثم يمر بعد ذلك بالنقطة المعلومة مستو عمودى على هذا المستقيم فيكون هو المستوى المطلوب

بـ ٦٩ د (شكل ٤٦ لوحه ١١) المطلوب ايجاد الزاوية الواقعة بين مستويين معلومين مثل م ﻫ ك و س ع ص أعنى زاوية ميل احدهما على الآخر

لذلك يقال يلزم بناء على ما قيل فى (بـ ٦٧ د) أن نقطع هذين المستويين بمستو ثالث عمودى على خط تقاطعهما وحيث انه بالبحث بمقتضى (بـ ٣٨ د) عن خط تقاطع هذين المستويين نجده عبارة عن المستقيم (ا ب , ا َ ب َ) وهو فى الفراغ كناية عن وتر مثلث قائم الزاوية ضلعاه هما ب ا و ا ا َ بحيث اذا طبق هذا المثلث على المستوى الافقى آل الى ب ا أ َ وحينئذ اذا أقيم من نقطة ح َ المفروضة بالاختيار على هذا الوتر عمود عليه مثل ح َ د ثم توهمنا بعد ذلك قيام المثلث أ َ ا ب فى وضعه الرأسى ب ا . فمن الواضح الجلى ان الخط ح َ د يصير اذ ذاك موجودا فى المستوى القاطع الذى يراد تمريره

بنقطة

بنقطة حَ عموديا على الفصل المشترك ثم من حيث ان خط حَءَ مقابل للمستوى الافقى فى نقطة ء فيكون المستقيم ءهـ المرسوم منها عموديا على المسقط ب ا هو بمقتضى (بـ٥٣ د) عبارة عن الاثر الافقى لهذا المستوى القاطع ومن المشاهد ان هذا المستوى الاخير يقطع المستويين المعلومين فى مستقيمين مارين بنقطة حَ المعتبرة فى الفراغ من جهة ومن الاخرى بنقطتى و ، هـ وصانعين لمثلث قاعدته هى وهـ وزاويته التى فى رأسه حَ تكون هى الزاوية المطلوبة وعلى ذلك فليس الامر محتاجا الا الى رسم هذا المثلث على احد مستويى المسقط وحيث ان ارتفاعه هو حَءَ بلا شك لكون هذا المستقيم فى وضعه الفراغى موجودا داخل المستوى الرأسى ب ا العمودى على القاعدة وهـ فلو طبق هذا المثلث بتدويره حول خط وهـ على المستوى الافقى فان رأسه حَ لا تخرج عن المستوى الرأسى ب ا العمودى على هذا المحور وحينئذ اذا أخذ على المستقيم ب ا بعد مثل حءَ=حَءَ كان مثلث وهـح هو المثلث المطلوب وزاوية وحهـ منه هى زاوية ميل المستويين م هـ ك ، س ع ص على بعضهما

ومن الممكن أيضا ان يطبق خط تقاطع المستويين المعلومين على المستوى الرأسى عوضا عن تطبيقه على المستوى الافقى فيصير هذا المستقيم منطبقا فى هذه الحالة على اَ سَ فاذا اقيم عليه عمود مثل حَءَ ورد أثر هذا العمود وهى نقطة ءَ الى نقطة ء أمكن اجراء العمل من هذه النقطة كما أجرى فى الحالة المتقدمة

بـ٧ د إذا كان أثران من آثار المستويين المعلومين متوازيين على مستو واحد من مستويى المسقط كما فى مستويى م هـ ك ، س ع ص (شكل ٤٧ لوحة ١١) لزم ادخال بعض تغييرات خفيفة فى العملية المتقدمة من شأنها جعل الحل أسهل مما تقدم لانه لا يخفى على من عرف ما فى (بـ٣٩ د) ان خط التقاطع يكون فى هذه الحالة كناية عن المستقيم الافقى (اَءَ ، اء) الموازى للاثرين الافقيين وبناء على ذلك اذا مر مستو رأسى مثل اَ ا ح عمودى على خط التقاطع المذكور فانه يقطع المستويين المعلومين فى مستقيمين صانعين مع ب ح مثلثا رأسه فى نقطة اَ وارتفاعه هو الرأسى اَ ا بحيث لو طبق هذا المثلث على المستوى الافقى بتدويره حول قاعدته ب ح لاتت رأسه وهى اَ فى اً وصارت زاوية ح اً ب كناية عن زاوية ميل المستويين المعلومين على بعضهما

وأخيرا اذا كانت جميع آثار المستويين المعلومين موازية لخط الارض كما فى

(شكل ٢١ لوحه ٤) لزم قطع المستويين المذكورين بمستوى القطاع غ ودك الذي سبق استعماله في (بـ ٤٢ د) فبواسطة عمليه التطبيق التي أجريناها في البند المذكور تحصل زاوية مثل دهٔا فتكون هي زاوية ميل المستويين المعلومين لان مستوى القطاع عمودي من طبيعته على خط تقاطعهما

بـ ٧١ د المطلوب ايجاد وضع مقدار البعد الاصغر بين مستقيمين غير موجودين في مستو واحد

قد تقدم ان المستقيمين ان لم يكونا متقاطعين ولا متوازيين فهما غير موجودين في مستو واحد ومن الضروري حينئذ معرفة أصغر الابعاد الواصلة بين نقطتين من نقطهما انما لاجل سهولة فهم تسلسل العمليات اللازم اجراؤها لحل هذه المسئلة نقدمه أولا ببيانها بطريقة نظريه على شكل نظري فنقول اذا فرض ان المستقيمين المعلومين هما حد ، اب (شكل ٤٨ لوحه ١٢) فنأخذ نقطة اختياريه مثل ه على المستقيم الاول ونرسم منها مستقيما مثل هو موازيا الى اب ونتوهم تمرير المستوى دهو فهذا المستوى يصير موازيا من نفسه الى المستقيم اب فعلى هذا اذا أنزل من أى نقطة من نقط هذا المستقيم الاخير عمود مثل حط على المستوى دهو كان هذا العمود مساويا للبعد الاصغر المطلوب ولكن لاجل الاثبات على انه يوجد مستقيم مساو الى حط وواصل بين نقطتين من نقط المستقيمين المعلومين يرسم من نقطة تقابل هذا العمود بالمستوى دهو التي هي نقطة ط مستقيم مثل طء موازا الى اب فالمستقيم طء يقطع بالضرورة مستقيم حد في نقطة مثل نقطة ء والا لكان المستقيم حد موازيا الى اب وهذا مخالف لما فرض في رأس المسئلة وحيث انه اذا أقيم من نقطة ء عمود مثل ءع على المستوى دهو لزم ان يكون هذا العمود موجودا في المستوى ب ح ط ء العمودي على مستوى دهو من الاصل فبناء على ذلك يكون المستقيم ءع متقاطعا مع المستقيم اب وحينئذ فيكون هذا المستقيم وهو ءع المساوي والموازي الى حط هو البعد الاصغر بين المستقيمين اب ، حد ومن المشاهد انه عمودي على كل منهما في أن واحد لكونه عموديا على مستوى دهو الموازي لهذين المستقيمين

ولاجل البرهنة على ان المستقيم ءع العمودي على كل من المستقيمين المعلومين هو في الحقيقة أصغر الابعاد الواصلة بين المستقيمين المذكورين يقال من المعلوم انه اذا وصل بين نقطتين اختياريتين مثل م ، ه من نقط المستقيمين المفروضين بمستقيم مثل مه

كان

كان المستقيم الموصول خارجا عن المستوى ب ح ط ء مادامت نقطة ه مأخوذة غير نقطة ء ومن هنا يعلم ان م ه مائل بالنسبة لمستوى ء ه و وبناء على ذلك يكون أطول من العمود م ء المساوى الى ء ع اما فى حالة ما تتحد نقطة ه بنقطة ء يكون المستقيم م ء مائلا على المستقيم ب ا فيكون حينئذ أطول من العمود ء ع الذى يصير بناء على ذلك أصغر الابعاد الممكن وصلها بين نقطتين حيثما اتفق من نقط المستقيمين المفروضين

بند ٧٢ ولنجرى الآن العمليات التى لم تذكر فى البند السابق الا بالطريقة النظرية بطريقة الهندسة الوصفية لتعلم حقيقتها وليظهر لنا الفرق بين العمليات المبهمة الموجودة فى الهندسة العادية وبين الطرق المضبوطة التى بها يتحصل فى الهندسة الوصفية على نتائج معينة بالكلية فى حل المسائل المتعلقة بالاشكال ذات الثلاثة ابعاد وقد أشرنا الى هذا الفرق فى (بندى ٣ و ٤) فنقول

ليكن (ا ب و اَ بَ) و (ح ء و حَ ءَ) (شكل ٤٩ لوحه ١٢) هما المستقيمان المعلومان فنحقق أولا أن هذين المستقيمين غير موجودين فى مستو واحد لانه مشاهد من الشكل أنهما غير متوازيين وكذلك حيث ان نقطتى تقابل مسقطيهما الرأسيين ومسقطيهما الافقيين ليستا على مستقيم واحد عمودى على خط الارض فهما غير متقاطعين اذا تقرر هذا ننتخب نقطة (ح و حَ) من المستقيم (ح ء و حَ ءَ) لنرسم منها مستقيما مثل (ح و و حَ وَ) موازيا للمستقيم (ا ب و اَ بَ) ثم نرسم اثرى المستوى المار بالمستقيمين (ح ء و حَ ءَ) و (ح و و حَ وَ) فنجدهما عبارة عن الاثرين ء و ه و ه حَ ثم نفرض نقطة مثل (ه و هَ) على المستقيم الثانى (ا ب و اَ بَ) وننزل منها المستقيم (ه ط و هَ طَ) عموديا على المستوى ء ه حَ ونبحث بمقتضى (بند ٤٦) عن نقطة تقابل هذا العمود بالمستوى ء ه حَ بواسطة استعمال المستوى ه ع عَ المسقط افقيا للمستقيم (ه ط و هَ طَ) ثم نرسم من نقطة (ط و طَ) مستقيما مثل (ط ل و طَ لَ) موازيا الى (ا ب و اَ بَ) فيقطع المستقيم (ح ء و حَ ءَ) بمقتضى (بند ٧١) فى نقطة مثل (ل و لَ) وبعد ذلك يمد من نقطة (ل و لَ) مستقيم مثل (ل م و لَ مَ) موازا الى (ه ط و هَ طَ) وحيث ان هذا المستقيم الممدود يلزم أيضا ان يكون متقاطعا مع المستقيم (ا ب و اَ بَ) فيلزم حينئذ ان تكون نقطتا م و مَ موجودتين على مستقيم

واحد عمودى على خط الارض وعلى ذلك فيكون لم , لَ مَ مسقطى البعد الاصغر المطلوب ثم لاجل ايجاد طوله الحقيقى يؤخذ بمقتضى (بـ٤٧ـد) على الافقى الممدود من نقطة لَ بعد مثل لَ لَ = لم ويوصل المستقيم مَ لَ فيكون هو الطول الحقيقى للبعد الاصغر المذكور

اما اذا كان المستقيمان المعلومان متوازيين فيكون البعدين بينهما واحدا فى جميع امتدادهما وللحصول عليه يكفى البحث عن البعد الاصغر بين أحدهما ونقطة حيثما اتفق من المستقيم الثانى ولا يخفى ان هذه المسئلة قد سبق حلها فى (بندى ٥٧ , ٥٨)

(تنبيه) اعلم ان طريقة ايجاد البعد الاصغر بين مستقيمين غير موجودين فى مستو واحد التى ذكرناها فى (بندى ٧١ , ٧٢) هى الطريقة العمومية الممكن تطبيقها على أى مستقيمين مهما كان وضعهما ولكن قد توجد أحوال فيها يكون البعد الاصغر بين المستقيمين المعلومين معينا من نفس معالم المسئلة قدرا ووضعا أو لا يكون معينا من معالم المسئلة لكن يمكن تعيينه بطرق أسهل من الطريقة العمومية وسنذكر تلك الاحوال فيما سيأتى بغاية الاختصار ونعتبرها كمسائل تطبيقية يطلب من التلامذة حلها وعمل الاشكال اللازمة لها مع ذكر بعض أفكار قليلة تساعدهم على حلها

(الفصل الثالث فى تغيير مستويات المسقط ومسائل تطبيقية على ما تقدم)

بـ٧٣ـد (فى نظرية تغيير مستويات المسقط) قد يتأتى أحيانا للرسيم خصوصا فى الرسومات المتعلقة بفن قطع الاحجار والاخشاب أن يضطر لاجل ايجاد بعض أجزاء المسئلة الى الاستعانة بمستويات مسقط مساعدة خلاف مستويى المسقط اللذين بينت عليهما معالم المسئلة المذكورة فعند ذلك يلزمه تعيين المساقط الجديدة للخطوط والنقط المعلومة بمساقطها على المستويين القديمين وقد درسنا هذه المسئلة فى بعض أحوال بسيطة كما تقدم فى البنود المنحصرة بين (بـ٤٧ـد , بـ٥٢ـد) والآن نعود لها لاجل تمام الكلام عليها فنقول

بـ٧٤ـد المعلوم نقطة مثل (ا , اَ) (شكل ٥٥ لوحه ١٢) بمسقطيها ا , اَ على مستويى مسقط رمزهما س , سَ وخط أرضهما هو غ ض ثم اقتضى الحال لتعويض المستوى الافقى س بمستو أفقى آخر يرمز له بحرف س٢ بحيث يكون خط أرضه هو غ٢ ض٢ مع توهم دوران المستوى المذكور حول خط أرضه حتى ينطبق

حسب

حسب العادة على المستوى س والمطلوب ايجاد مسقطي هذه النقطة على مستويي المسقط س و سَ

فلذلك يقال حيث ان المستوى سَ ثابت فالمسقط الرأسي لهذه النقطة يبقى ثابتا ولا يزال هو نقطة أَ وأما المسقط الافقي الجديد لهذه النقطة الذي هو ا فلاشك انه يلزم للحصول عليه ان يؤخذ على العمود ا أَ بعد مثل ه ا مساو الى و ا وهذا أمر بديهي وواضح لا يحتاج الى طول البرهان وبمثل ذلك اذا كانت موجودة نقطة أخرى مثل (ب و بَ) فراعيه تحول مسقطاها الى بَ و ب بحيث ان المستقيم الفراغي (اب و أَبَ) لا يزال مسقطه الرأسي هو أَبَ وأما مسقطه الافقي الجديد فيصير عبارة عن ا ب الموازي الى اب

فاذا كان معلوما مستو مثل م ء ك باثريه م ء و ء ك على مستويي المسقط س و سَ وأريد ايجاد أثريه على مستويي سَ و س يقال ان أثره الرأسي لا يزال عبارة عن خط م ء وأما أثره الافقي الجديد على المستوى س فانه يخرج من نقطة ء الكائنة على غ ض ويصير عبارة عن ء ك الموازي الى ء ك ومثل ذلك يجري في حالة ما اذا أريد تعويض المستوى الرأسي سَ بمستو آخر موازله

بند ٧٥ ولنفرض الآن ان المستويين الاصليين س و سَ اللذين خط أرضهما هو غ ض (شكل ٥١ لوحه ١٢) قد حفظنا أحدهما وهو الافقي س واستعوض المستوى الثاني وهو الرأسي سَ بمستو مثل س رأسي أيضا لكن خط أرضه على المستوى س مستقيم حيثما اتفق غ ض الذي يتوهم دوران المستوى س حوله حتى ينطبق على المستوى س فعند ذلك كل مستقيم كالمستقيم الذي كان مسقطاه الاصليان هما اب و أَبَ يحفظ بالضرورة مسقطه الافقي اب وأما مسقطه الرأسي الجديد على المستوى س فيكفي لايجاده ان ينزل من نقطتي ا و ب عمودان على خط الارض الجديد غ ض ثم يؤخذ الارتفاعان

ح ا = ح أَ و ء ب = ء بَ

فيحصل لنا المسقط الرأسي الجديد وهو ا ب على المستوى سه المنطبق
وأما اذا كان المعلوم مستويا مثل م هك باثريه هك و هم على المستويين الاصليين
فمن المعلوم ان أثره الافقي هك يبقى بالضرورة على أصله بحيث اذا مدحتى يتلاقى مع
خط الارض الجديد خ ض في نقطة مثل ه فان هذه النقطة الاخيرة تكون
بالضرورة نقطة من الاثر الرأسي للمستوى المعلوم م هك على المستوى سه وأيضا اذا
تصورنا قيام المستوى المذكور سه في وضعه الرأسي فانه يقطع المستوى الرأسي
الاصلي سه في المستقيم الرأسي ٥ق الذي هو مقابل للمستوى م هك في نقطة ق
وحينئذ متى طبق المستوى س حول خط أرضه خ ض فان هذا الرأسي ٥ ق
ينطبق على مستقيم مثل ٥ و عمودي على محور الدوران خ ض وتكون نقطة و
نقطة من خط تقاطع المستوى م هك بالمستوى سه أعني ان نقطة و تكون نقطة
من أثر المستوى م هك على المستوى الرأسي سه وبناء عليه يكون هذا الاثر عبارة
عن المستقيم ه و م

بند ٧٦ ذا الحالة التي تقدمت في البند السابق وان كانت هي في الحقيقة الحالة النافعة دون
غيرها لكن لاجل ان نبين ان المسئلة قابلة للحل بوجه عمومي التزمنا بذكر حل المسئلة
الآتية

(شكل ٥٢ لوحه ١٣) اذا فرض ان مستويي المسقط الاصليين هما سه الافقي
و سَ الرأسي وانه صار تطبيق أحدهما على الآخر بتدويره حول خط أرضهما
خ ض ومعلوم نقطة فراغية بمسقطيها ب و تَ على هذين المستويين والمطلوب ايجاد
مسقطي هذه النقطة بعينها على مستويين جديدين مثل س و س متعامدين على
بعضهما أيضا وأثرا أولهما وهو س على المستويين الاصليين هما م ه و هك اما خط
أرضهما أعني فاصلهما المشترك فهو المستقيم المسقط افقيا على خ ض ولا حاجة لاعطاء
مسقطه الرأسي اذ يمكن الحصول عليه بالسهولة لان خط الارض المذكور موجود
في المستوى م هك المعلوم

فلذلك

فلذلك يمر بنقطة (و بَ) مستوى قطاع عمودي على هك فيكون بالضرورة رأسيا ويكون أثره الافقى عبارة عن المستقيم ب هو أما أثره الرأسى فهو المستقيم وَوَ العمودى على خ س وهذا المستوى يقطع المستوى م هك فى مستقيم اذا طبق مع مستوى القطاع حول ن و انطبق بالضرورة على هوً أما نقطة (ب و تَ) فانها تنجر مع مستوى القطاع وتأخذ وضعا مثل تَ وللحصول على هذا الوضع يقام من نقطة ب عمود على محور الدوران مثل بتَ = طتَ وحينئذ اذا أنزل من نقطة تَ عمود مثل تَقَ على هوَ وتصورنا قيام مستوى القطاع فى وضعه الاصلى رأينا ان نقطة قَ هى مسقط نقطة (ب و تَ) على المستوى م هك أعنى على المستوى س٢ لكن حيث انه لاجل استعمال مستوى المسقط س٢ لابد من تطبيقه على ورقة الرسم فنتصور دورانه حول هك حتى ينطبق على المستوى الافقى الاصلى وبذلك تأتى نقطة قَ فى الوضع ب٢ ويبقى علينا حينئذ ان نبحث بعد الدوران عن وضع خط الارض المسقط افقيا على خ٢ ض١ والموجود فى المستوى م هك ولذلك يمد من نقطة ض١ عمود غير محدود على محور الدوران هك ويرسم قوس دائرة بنصف القطر ه ضَ فيعلم ان نقطة ض١ هى منطبق نقطة (ض و ضَ) وعلى هذا يكون خط خ٢ ض٢ هو منطبق خط الارض الجديد وأخيرا اذا تصورنا ان مستوى المسقط س٣ دار حول خ٢ ض٢ حتى انطبق على المستوى الافقى كفى لايجاد المسقط الثانى لنقطة (ب و تَ) عليه ان يمد من نقطة ب٣ عمود غير محدود على خ٢ ض٢ وان يؤخذ البعد لا ب٣ مساويا الى تَوَ وعلى هذا تكون نقطتا ب٢ و ب٣ هما مسقطا نقطة (ب و تَ) على مستويى المسقط س٢ و س٣ الجديدين المنطبقين على بعضهما حول خط أرضهما خ٢ ض٢

(فى بعض مسائل تطبيقية على ما تقدم)

بند ٧٧ هذه المسائل يطلب حلها من التلامذة لاجل تمرينهم وتدريبهم على فهم القواعد المتقدمة ولا بأس من مساعدة المعلم لهم فيما يتعسر عليهم حله

(المسئلة الاولى) المعلوم نقطتان مثل (ا و آ) و (ب و بَ) (شكل ٥٣ لوحه ١٣).

لكن أحداهما وهى (ا ، اَ) فوق المستوى الافقى للمسقط والاخرى تحته والمطلوب ايجاد حقيقة البعد الواصل بينهما بجميع الطرق التى تقررت فى (بند ٢٦ و ٢٧ و ٢٨)

(المسئلة الثانية) المطلوب تمرير مستو بمستقيمين معلومين فى جميع الاحوال الآتية

(أولا) حينما يكون أثرا أحدهما غير موجودين فى حدود الرسم

(ثانيا) حينما يكون المستقيمان الفراغيان المعلومان متقاطعين فى نقطة من خط الارض

(ثالثا) حينما يكون كل من المستقيمين المعلومين موازيا الى خط الارض

(رابعا) حينما يكون احد المستقيمين المعلومين موازيا للمستوى الافقى أو للمستوى الرأسى

(المسئلة الثالثة) المطلوب مد مستقيم من نقطة معلومة بحيث يكون قاطعا لمستقيمين معيني الوضع

لاجل حل هذه المسئلة يكفى ان يمرر بكل واحد من المستقيمين المعلومين والنقطة المعلومة مستو فخط تقاطع المستويين الحادثين يكون هو المستقيم المطلوب

أو يمرر بأحدهما وبالنقطة مستو واحد ثم نبحث عن نقطة تقابل هذا المستوى بالمستقيم الثانى ويوصل منها الى النقطة المعلومة بمستقيم فيكون هو المستقيم المطلوب

(المسئلة الرابعة) المطلوب تمرير مستو بمستقيم معلوم بحيث يكون عموديا على مستو معلوم أيضا

(المسئلة الخامسة) المعلوم نقطة والمطلوب مد مستو منها بحيث يكون عموديا على مستويين معلومين أيضا

(المسئلة السادسة) المطلوب ايجاد مركز ونصف قطر الدائرة التى تمر بثلاث نقط معلومة بمساقطها

(المسئلة السابعة) المطلوب تعيين مسقطى الخط المنصف للزاوية الواقعة بين مستقيمين معلومين بمساقطهما

(المسئلة الثامنة) المطلوب تمرير مستقيم من نقطة معلومة بحيث يكون صانعا مع مستقيم آخر معلوم بمسقطيه زاوية معلومة أيضا

(المسئلة التاسعة) المطلوب ايجاد المسقط الرأسى لمستقيم من بعد معرفة نقطة منه ومسقطه الافقى وزاوية ميله على المستوى الافقى

(المسئلة العاشرة) المطلوب ايجاد الزاوية الزوجية الواقعة بين مستويين معلومين

بطريقة

بطريقة غير الطريقة المتقدمة في س ٦٩ د
ملخص الحل هو ان يفرض داخل الزاوية الزوجية المذكورة نقطة وينزل منها عمود على أحد المستويين وعمود على المستوى الآخر ويبحث عن الزاوية الواقعة بين العمودين فتكون مكملة للزاوية المطلوبة وعلى الطالب ان يعمل الرسم اللازم لهذه المسئلة طبقا لهذا الحل الملخص

(المسئلة الحادية عشر) المعلوم مستقيم موجود داخل مستو معلوم بأثريه والمطلوب تمرير مستو بهذا المستقيم بحيث يكون صانعا مع المستوى الاول زاوية معلومة هـ

(الفصل الرابع)

(في المسائل المختصة بحل الزاوية المجسمة الثلاثية)

س ٧٨ د كل زاوية مجسمة ثلاثية مثل الزاوية س ا ب ح (شكل ٤٥ لوحة ١٣) تشتمل على ثلاثة زوايا مستوية وثلاث زوايا زوجية أما الثلاث الاولى فهي الزوايا المستقيمة الاضلاع المتكونة بين أحرف الزاوية المجسمة وبعضها وأما الثلاث زوايا الاخر فهي عبارة عن زوايا ميل الاوجه على بعضها ومتى علم ثلاث زوايا من هذه الست أمكن دائما تعيين الزوايا الباقية بحيث ينشأ عن ذلك ست مسائل متميزة

لاننا اذا رمزنا بالحروف ا و ب و ح الى الزوايا الزوجية التي أحرفها هي على التناظر س ا و س ب و س ح وبالحروف اَ و بَ و حَ الى الزوايا المستوية أعني الاوجه المقابلة الى هذه الزوايا الزوجية ظهرت لنا الاحوال الستة الآتية

(أولا) ان يكون المعلوم الثلاثة أوجه اعني الزوايا المستوية اَ و بَ و حَ
(ثانيا) ان يكون المعلوم وجهين والزاوية الزوجية المنحصرة بينهما اَ و بَ و ح
(ثالثا) المعلوم وجهان والزاوية الزوجية المقابلة لاحدهما اَ و بَ و ب
(رابعا) المعلوم زاويتان زوجيتان وأحد الوجهين المقابلين لهما ا و ب و بَ
(خامسا) المعلوم زاويتان زوجيتان والوجه المنحصر بينهما ا و ب و حَ
(سادسا) المعلوم الثلاث زوايا الزوجية ا و ب و ح

فهذه الستة احوال هي الناشئة من أخذ توافيق الست زوايا ا و ب و ح و اَ و بَ و حَ ثلاثية لكن من بعد حذف التوافيق المشتركة

والثلاثة احوال الاخيرة من هذه الست يمكن تحويلها الى الثلاثة الاول وذلك باستعمال الزاوية المجسمة الثلاثية المكملة للزاوية المجسمة المعلومة • وهاك بيان ذلك

بند ٧٩ اذا اخذت نقطة كنقطة سَ داخل الزاوية المجسمة الثلاثية س (شكل ٥٤ لوحه ١٣) وأنزل منها ثلاثة اعمدة مثل سَ آ و سَ بَ و سَ حَ على الثلاثة أوجه ثم اعتبرنا لاجل زيادة الايضاح ان المستوى ب س ح افقى والضلع س ا مستقيم موجود فوق هذا المستوى وخارج عنه فانه يتكون عن ذلك زاوية مجسمة ثلاثية أخرى سَ أحرفها هى المستقيم الرأسى سَ آ والمستقيمان سَ بَ و سَ حَ العموديان على الوجهين ا س ح و ا س ب كل على نظيره وهذه الزاوية المجسمة الثلاثية الجديدة هى ما تسمى بالزاوية المكملة للزاوية الاصلية لان أوجهها زواياها الزوجية مكملة للزوايا الزوجية ولا وجه الزاوية الاصلية المذكورة وبالعكس بالعكس وللبرهنة على ذلك نرمز بالحروف آ و بَ و حَ للزوايا الزوجية المنحصرة بين الاوجه المتقاطعة فى المستقيمات سَ آ و سَ بَ و سَ حَ وبالحروف ا و ب و ح الى الاوجه المقابلة لهذه الاضلاع فنجد ان المستوى آ سَ بَ العمودى على كل من الوجهين ب س ح و ا س ح يقطعهما فى مستقيمين مثل آ هـ و بَ هـ يكونان بنفسهما عمودين على س ح وبناء على ذلك تكون زاوية آ هـ بَ معيار الزاوية الزوجية ح ومن حيث أن الشكل الرباعى سَ آ هـ بَ فيه زاويتان قائمتان وهما آ و بَ فحينئذ تكون الزاويتان الاخريان متكاملتين ويكون

$$\text{آ سَ بَ} + \text{آ هـ بَ} = ١٨٠^\circ \quad \text{أعنى ان} \quad \text{حَ} + \text{ح} = ١٨٠^\circ$$

وبمثل ذلك يبرهن على أن $\text{بَ} + \text{ب} = ١٨٠^\circ$

وأن $\text{آ} + \text{ا} = ١٨٠^\circ$

من الشكلين الرباعيين سَ آ د حَ و سَ حَ و بَ الناشئين عن تقاطع الوجهين آ سَ حَ و بَ سَ حَ بأوجه الزاوية المجسمة الثلاثية س وحينئذ فيثبت المطلوب من ان أوجه الزاوية المجسمة سَ هى الزوايا المكملة للزوايا الزوجية من الزاوية المجسمة س

بند ٨٠ فاذا اعتبرنا الآن الزوايا الزوجية من المجسمة الثلاثية سَ رأينا ان الوجهين

تَ سَ آ ، حَ سَ آ العمودين على المستوى ب س ح قاطعان له فى المستقيمين آ هـ ، آ ء وبناء على ذلك تكون الزاوية المستوية ء آ هـ معيارا للزاوية الزوجية آ وحيث كان الوجه آ سَ تَ عموديا على س ح والوجه آ سَ حَ عموديا على س ب فتكون بالضرورة زاويتا ء و هـ من الشكل الرباعى س ء آ هـ قائمتين وبناء على ذلك تكون زاويتاه الاخريان متكاملتين وتكون زاوية

ء آ هـ + ء س هـ = ١٨٠° أو آ + ا = ١٨٠°

وبمثل ذلك يبرهن على ان تَ + ب = ١٨٠°

وان حَ + ح = ١٨٠°

وذلك من الشكلين الرباعيين س هـ تَ و ، س ء حَ و ومن ذلك يثبت المطلوب حينئذ من ان الزوايا الزوجية من الزاوية المجسمة الثلاثية سَ مكملة لاوجه الزاوية المجسمة س بل يمكن ان يقال ان الزاوية المجسمة س نفسها مكملة للزاوية المجسمة سَ

بـ ٨٣ ـد يلزم ان يلاحظ انه اذا جعلت نقطة سه التى هى رأس الزاوية المجسمة مركزا ورسمت كرة بنصف قطر حيثما اتفق مثل س ا فان سطح هذه الكرة يتقاطع مع أوجه هذه المجسمة فى ثلاثة أقواس من دوائر عظام كالاقواس اب ، ب ح ، ح ا التى يتكون عنها مثلث كروى اضلاعه هى معايير للزوايا المستوية ا ، ب ، ح وزواياه عبارة عن زوايا ميل أوجه الزاوية المجسمة الثلاثية على بعضها بعض أعنى عبارة عن مقادير الزوايا ا ، ب ، ح

ومن ذلك يرى أن طرق انشاء الزاوية المجسمة الثلاثية من بعد معرفة ثلاثة اجزاء من اجزائها الستة لم تكن سوى حلول رسمية للمسائل التى تحل فى علم حساب المثلثات الكروية بحلول حسابية وهذا مصداق لما ذكرنا فى بندى (١ ، ٢) من ان المسائل الرياضية يمكن حلها اما بالرسم واما بالجبر والحساب

وأيضا اذا نقلنا الزاوية المجسمة سَ الى المركز سه فان أوجهها تتقاطع مع سطح الكرة فى ثلاثة اقواس يتكون عنها مثلث كروى هو المثلث الكروى المكمل او القطبى للمثلث ا ب ح وهذا المثلث القطبي يستعمل أيضا فى علم حساب المثلثات الكروية للمساعدة على حل المثلث الاول

بـ٨٢د ولنرجع الآن الى حل المسائل الستة التى ذكرناها فى بـ٧٨د ونلاحظ أنه اذا علمت الثلاث زوايا الزوجية ا و ب و ح من الزاوية المجسمة الثلاثية س أمكن بالسهولة تعيين الزوايا المكملة لها وبمقتضى ما تقرر فى بـ٧٩د تكون هذه الزوايا المكملة عبارة عن الزوايا المستوية أعنى الاوجه أ و بَ و حَ لزاوية مجسمة أخرى سَ وحينئذ نرى انه اذا أمكن تعيين الزوايا الزوجية آ و تَ و حَ من الزاوية المجسمة سَ المذكورة بواسطة معلومية أوجهها المتقدمة وهى آ و تَ و حَ أمكن بالسهولة أيضا تعيين الاوجه ا و ب و ح للزاوية المجسمة الاصلية لان هذه الاوجه ليست الا الزوايا المكملة للزوايا الزوجية آ و تَ و حَ من المجسمة الثلاثية سَ ومن ذلك يتضح ان الحالة السادسة من الاحوال الستة المتقدمة فى بـ٧٨د تؤول الى الحالة الاولى منها وان الحالة الخامسة تؤول بالمثل الى الثانية والحالة الرابعة الى الحالة الثالثة واذن اذا حلت الثلاث حالات الاول تحل الثلاثة الاخرى أو بالعكس فلنشتغل الآن حينئذ بحل الثلاث مسائل الاولى فنقول

بـ٨٣د (الحالة الاولى) المعلوم الثلاثة أوجه ا و ب و ح (شكل ٥٥ لوحه ١٣) من زاوية مجسمة ثلاثية والمطلوب تعيين زواياها الزوجية الثلاث ا و ب و ح لذلك نأخذ نقطة حيثما اتفق مثل س فى المستوى الافقى ونمد منها الاربعة المستقيمات س آ و س ب و س ح و س أ بحيث تكون صانعة مع بعضها ثلاث زوايا مساوية للثلاثة أوجه المعلومة ا و ب و ح كما هو مشاهد فى الشكل باعتبار أن أحدها وهو الوجه ا موجود فى الاصل على المستوى الافقى وأن الوجهين الآخرين ب و ح قد دارا على التناظر حول س ح و س ب حتى انطبقا مع الوجه الاول على المستوى الافقى

ثم نأخذ على المستقيمين س آ و س آ نقطتين مثل م و م متساويتى البعد عن نقطة س ونقول لاشك انه يكفى لترجيع هذه الزاوية المجسمة المنحلة الى حالة تركيبها الاصلية أن ندور الوجهين آ س ب و آ س ح حول مستقيمى س ب و س ح باعتبارهما محورى دوران حتى ينطبق المستقيمان س آ و س آ على بعضهما فى الفراغ ويصيرا مستقيما واحدا هو الحرف الثالث من أحرف الزاوية المجسمة ولا يخفى

ان

أن نقطتى م و مٓ ترسمان فى أثناء هذه الحركة قوسين مستوياهما عموديان على محورى الدوران سب و سح ينسقطان أفقيا على المستقيمين مهمَ و مٓءمَ النازلين عموديا على سب و سح من نقطتى م و مٓ لكن حيث كانت هاتان النقطتان متساويتى البعد عن نقطة س فعندما يتحد المستقيمان سا و سأ ببعضهما تتحد بالضرورة هاتان النقطتان وتصيران نقطة واحدة فى الفراغ مسقطها على المستوى الافقى يوجد بالضرورة فى نقطة مَ التى هى نقطة تقاطع مسقطى القوسين اللذين رسمتهما النقطتان م و مٓ وبناء على ذلك يكون المستقيم سمَ ا هو مسقط الحرف الثالث من الزاوية المجسمة

وأيضا المستوى الرأسى ءمَ العمودى على سح ينبغى أن يقطع الوجهين المارين بهذا الحرف فى مستقيمى ءمَ و ءمٓ اللذين اذا ردّا الى وضعهما الحقيقى صنعا بينهما زاوية مساوية لزاوية ميل هذين الوجهين على بعضهما وتكون منهما ومن الرأسى المقام من نقطة مَ مثلث قائم الزاوية وحينئذ اذا طبق هذا المثلث على المستوى الافقى بتدويره حول قاعدته ءمَ بان أقيم على هذه القاعدة عمود مثل مَوَ غير محدود ثم حدّد هذا العمود بجعل نقطة ء مركزا ورسم القوس مٓوَ بنصف القطر ءمٓ فهذا القوس يتقاطع مع العمود المتقدم فى نقطة مثل وَ بحيث لو وصل منها الى ء بالمستقيم وَء لكانت زاوية وَءمَ المستوية معيار الزاوية الزوجية ح المبحوث عنها

وكذلك مستوى همَ الرأسى يقطع الوجهين المارين بالحرف سب فى مستقيمى همَ و هم اللذين اذا رفعا الى وضعهما الحقيقى صنعا بينهما زاوية مستوية هى معيار الزاوية الزوجية ب وبما أن هذين المستقيمين صانعان أيضا مع الرأسى مَ مثلثا قائم الزاوية بهما قاعدته ووتره امكن بالسهولة حينئذ ايجاد المنطبق وَهمَ لهذا المثلث بحيث تكون زاوية مَهوَ هى معيار زاوية ب الزوجية ومما ينبغى ملاحظته أيضا هو أنه يجب ان يكون الرأسيان مَوَ و مَوً متساويين لان كلا منهما يدل على شئ واحد وهو ارتفاع النقطة الوحيدة من الحرف سا التى تنسقط على نقطة مَ

ولاجل الحصول على معيار الزاوية الزوجية الثالثة ا يمر مستو قاطع عمودى على الحرف سا من نقطته المنسقطة على نقطة مَ والمنطبقة من جهة على مٓ ومن الجهة

الاخرى على م فهذا المستوى يقطع الوجهين الجانبيين فى مستقيمين مثل مح و مط يكونان على التناظر عموديين على سه أ و سه آ وبناء على ذلك يكون خط تقاطع هذا المستوى مع الوجه حسه ب هو عبارة عن المستقيم ح ط الذى يلزم أن يكون بمقتضى نمرة ٥٣ د عموديا على المسقط الافقى للحرف الثالث وهو سه ا وحينئذ فلو رسم مثلث مَ ح ط بواسطة الثلاثة خطوط ح م و ح ط و ط م لكانت زاويته التى فى رأسه مَ هى بالضبط معيار الزاوية الزوجية التى حرفها سه ا

وليلاحظ أيضا ان هذا المثلث قبل تطبيقه حول ح ط كانت رأسه مَ موجودة على نقطة الحرف سه ا المسقطة على نقطة مَ ولما كان محور الدوران ح ط المذكور عموديا على المستوى الرأسى سه ا كما تقدم لزم أن لا تخرج نقطة مَ عن هذا المستوى وبناء على ذلك يجب أن يكون منطبق هذه النقطة موجودا على امتداد المستقيم سه مَ ا وهذا تحقيق للعمل يجب ملاحظته

بند ٨٤ هذه العمليات المتقدمة يمكن اجراؤها أيضا فى حالة ما تكون الثلاث زوايا ا و ب و ح كلها أو بعضها قائمة والاجل أن تكون المسئلة ممكنة الحل يلزم دائما استيفاء الشرطين الآتيين أولا أن يكون مجموع الثلاث زوايا ا و ب و ح أقل من أربع زوايا قوائم وثانيا ينبغى أن تكون أكبر هذه الزوايا أصغر من مجموع الزاويتين الاخريين

لانه ان لم يتوفر حصول هذين الشرطين من معالم المسئلة شوهد بالسهولة ان العمليات الرسمية توصلنا الى ونرين للمثلثين ءمَوَ و همَ وَ يكونان أقصر من قاعدتيهما وبهذا يستحيل رسم هذين المثلثين بخلاف ما اذا توفر الشرطان المتقدمان فانه يمكن تكوينهما بالسهولة وتكون معالم المسئلة بناء على ذلك كافية لتركيب الزاوية المجسمة

بند (فى رد الزاوية الى الافق) كثيرا ما يحتاج فى عملية رفع المستويات أعنى فى رسم الخرط الطبوغرافية الى رد زاوية معلومة الى الافق أعنى ايجاد المسقط الافقى لزاوية مثل ا معلوم مقدارها ومعلوم أيضا الزاويتان الواقعتان بين ضلعيها وبين الخط الرأسى النازل من رأسها اللتين نرمز لهما بحرفى ب و ح ولذلك نقول لو تصورنا زاوية مجسمة ثلاثية أحرفها هى هذا الخط الرأسى وضلعا الزاوية المعلومة ا لرأينا ان الثلاث زوايا

المستوية

المستوية ا و ب و ح أعنى أوجه هـذه الزاوية المجسمة معلومة ويكون حينئذ المسقط المطلوب كناية عن الزاوية المستوية التى هى معيار للزاوية الزوجية ا المقابلة للوجه ا والمنحصرة بين الوجهين الرأسيين ومن ذلك يفهم أن هذه المسئلة داخلة ضمن مسئلة بـ ٨٣ د ويمكن حلها كما حلت المسئلة المذكورة لكن لكون أحد أحرف الزاوية المجسمة هو فى هذه الحالة خط رأسى وهذا ما يعطى الشكل وضعا بسيطا لزم حل هذه المسئلة حلا بسيطا خاصا بها

(شكل ٥٦ لوحه ١٤) ولذلك نرسم فى المستوى الرأسى للمسقط أو فى أى مستو ما مستقيمين يكونان صانعين مع الخط الرأسى س ا المأخوذ بالاختيار زاويتين مثل ا س ب و ا س ح بحيث تكون زاوية ا س ب = ح وزاوية ا س ح = ب ثم ندور هذه الزاوية الاخيرة أعنى ا س ح حول الرأسى س ا مع حفظ مقدارها على حالته الاولى الى أن يصير ضلعها المتحرك س ح صانعا فى الفراغ مع الضلع الثابت س ب زاوية مساوية للزاوية ا المعلومة وبذا تصير الزاوية المعلومة موجودة بالضبط فى وضعها المقرر لها من رأس المسئلة وحينئذ يسهل علينا ايجاد مسقطها الافقى ومن حيث انه فى اثناء هذه الحركة الدورانية حول س ا ترسم نقطة ح التى هى أثر الضلع المتحرك قوس الدائرة ح حَ الذى مركزه نقطة ا وتسير عليه الى ان تقف فى نقطة منه كنقطة حَ بحيث يكون بالضرورة بعدها عن النقطة الثابتة ب قاعدة لمثلث ضلعاه الآخران مستقيمان مساويان الى س ب و س ح والزاوية الواقعة بينهما تساوى زاوية ا وحينئذ لو رسم على المستوى الرأسى زاوية مثل ب س حَ = ا وأخذ البعد س حَ = س ح لكان المستقيم ب حَ عبارة عن البعد الذى نوهنا عنه فاذا نقلنا هذا البعد بواسطة قوس دائرة وجعلناه من ب الى حَ علم لنا الوضع حَ الذى ينبغى ان يقف عنده أثر الضلع المتحرك س ح وبناء على ذلك يتضح ان هـذا الضلع يصير بعد الحركة منسقطا أفقيا على ا حَ ومن حيث ان الضلع الثابت س ب منسقط على ا ب فيؤخذ من ذلك أن زاوية ا الفراغية منسقطة على زاوية ب ا حَ وهـذا المسقط قد يكون بالضرورة أكبر أو اصغر من الزاوية الاصلية ا وهو الذى يجب أخـذه واستعماله فى الخرط الطبوغرافيـه بدلا عن الزاوية الفراغية ا لان

الاشياتبين فى الخرط المذكورة بمساقطها الا بحقائقها

بـ ٨٣ـ د (الحالة الثانية) المعلوم من الزاوية الجسمة الثلاثية وجها ا ، ب والزاوية الزوجية المنحصرة بينهما وهى ح والمطلوب ايجاد وجهها الثالث والزاويتين الزوجيتين الاخريين

(شكل ٧٥ لوحه ١٤) مثلا ليكن الوجهان المعلومان هما ب س ح = ا ، ح س آ = ب باعتبار أنهما منطقبان على المستوى الافقى فاذا تصورنا دوران الوجه الثانى منهما وهو ح س آ حول س ح الى أن يشغل فى الفراغ وضعا يكون صانعا فيه مع الوجه ب س ح زاوية زوجية تساوى زاوية ح الزوجية المعلومة فيتحصل حينئذ على وجهين من الزاوية الجسمة موضوعين فى وضعهما الحقيقى وحيث انه اذا أخذت نقطة بالاختيار على الضلع المتحرك كنقطة ءَ مثلا نرى انها لا تخرج فى مدة هذه الحركة الدورانية عن المستوى الرأسى ءَ ءم العمودى على محور الدوران فلو أخذنا حينئذ فى هذا المستوى من بعد تطبيقه على المستوى الافقى بتدويره حول ءم زاوية مثل م ءك = ح ثم أخذ البعد ءع ح = ءء ءَ رأينا بالبداهة ان نقطة ءَ تأتى بعد الدوران وتتحد مع نقطة حَ وعلى ذلك يكون مسقطها الافقى اذ ذاك فى نقطة ء عندما يأخذ الوجه المتحرك آ س ح ميله المقرر له فى رأس المسئلة فاذا لاحظنا الآن أن النقطة الفراغية التى مسقطها ء ومنطبقها ع هى من ضمن نقط الوجه الثالث المجهول وتصورنا انطباق هذا الوجه على المستوى الافقى حول س ب علمنا ان نقطة (ء ، ح) لا تخرج أبدا عن المستوى الرأسى ء ءً العمودى على محور الدوران المذكور وبما أن هذه النقطة يجب أيضا أن تبقى على بعد ثابت من رأس الجسمة مساو الى س ءَ فاذا رسم قوس دائرة بهذا البعد قطع المستقيم ء ءً الغير المحدود فى نقطة مثل ءً بها تحدد الزاوية ءً س ب فتكون هى الوجه الثالث المجهول وحيث صارت الثلاثة أوجه من الزاوية الجسمة معلومة فيمكن حينئذ بواسطة ما تقرر فى بـ ٨٣ـ د ايجاد الزاويتين الزوجيتين المجهولتين

ويمكن أيضا استعمال البعد م حَ المساوى بالضرورة الى م ءً لرسم قوس دائرة آخر ليتقاطع مع القوس الاول فى نقطة يلزم أن تكون هى نقطة ءً

(تنبيه) هذه المسئلة تكون دائما ممكنة الحل ولا يعتريها قط أحوال يستحيل فيها تركيب الزاوية الجسمة كما قد يحصل ذلك فى المسئلة الاولى .

بـ ٨٧ـ د

بند ٨٧ (الحالة الثالثة) المعلوم وجهها ا ، ب من زاوية مجسمة ثلاثية والزاوية الزوجية ب المقابلة لاحدهما والمطلوب تعيين الاشياء الباقية منها

(شكل ٥٨ لوحة ١٤) لنفرض كما في الحالة المتقدمة أن زاويتي ب س ح = ا

و ح س ا = ب هما الوجهان المعلومان في حالة انطباق على المستوى الافقي ونتصور مرور مستو رأسي عمودي على الحرف س ب من نقطة حيثما اتفق منه كنقطة ے مثلا وليكن المستوى المذكور هو ےع و بعد أن نعتبره منطبقا على المستوى الافقي نرسم الزاوية لےع = ب فاذا تصورنا بعد ذلك قيام هذه الزاوية ورجوعها الى وضعها الاصلي وتوهمنا مرور مستو غير محدود بالمستقيمين س ے و ےل دل ذلك المستوى على وضع الوجه المجهول من المجسمة بحيث لم يبق علينا لاجل تركيب هذه المجسمة سوى أن ندور الوجه ا س ح حول ح س حتى يصير الحرف س ا موجودا في المستوى س ےل وفي أثناء هذا الدوران لا تخرج نقطة ى المفروضة على الحرف المتحرك عن المستوى الرأسي ىوم المار بنقطة و والعمودي على محور الدوران ح س وبناء عليه فنقطة ى تقف على خط تقاطع المستوى الرأسي وم مع المستوى الغير المحدود س ےل وبما أن خط التقاطع المذكور لم يكن سوى المستقيم المخرج من نقطة م لكونها أثره الافقي والمقابل للخط الرأسي و في نفس نقطة تقاطع الرأسي المذكور مع المستقيم ےل بعد رفعه الى وضعه الحقيقي وحينئذ فلاجل تعيين ارتفاع نقطة التقاطع المذكورة عن المستوى الافقي يقام المستقيم ول عموديا على ےو ثم ينقل البعد ول على زاوية قائمة مع وم بالابتداء من نقطة و الى نقطة ل مثلا فلو وصل بعد ذلك المستقيم م لَ لكان هو خط التقاطع الذي ذكرناه وهذا هو المستقيم الذي يجب أن تقف عنده نقطة ى المأخوذة على الحرف المتحرك س ا عندما يشغل المستوى ا س ح وضعه الحقيقي في الفراغ وعلى هذا اذا رسم بنصف القطر ىو قوس دائرة ليقطع م لَ في نقطة ع التي تكون بالضرورة نقطة من الحرف الثالث سا موجودة في المستوى وم فيسهل حينئذ تعيين مسقطها الافقي وهو ى

ثم نلاحظ الآن أن نقطة ع الموجودة في المستوى الرأسي م و هي من نقط مستوى الوجه المجهول وأن هذه النقطة لا يتغير بعدها عن نقطتي م و س اذا دار المستوى المذكور حول الحرف س ب لينطبق على المستوى الافقي وذلك لان نقطتي م و س

موجودتان على محور الدوران ولكون هذين البعدين مساويين فى الحقيقة الى م ح ، س ءَ فلو رسم حينئذ بجعل هذين البعدين نصفى قطرين قوسا دائرتين كانت نقطة تقاطعهما وهى ءً منطبقة النقطة ح وبناء عليه يكون الوجه المجهول عبارة من الوجه ءً س ب ولا يخفى انه متى تعين هذا الوجه آلت المسئلة الى مسئلة بند ٨٣ الذى بمقتضاه يمكن ايجاد الاجزاء الباقية المجهولة من المجسمة الثلاثية

وكان يمكن أيضا ايجاد المنطبق ءً لنقطة ح بتقاطع احد القوسين المتقدمين مع المستقيم ء ءً المنزل عموديا على محور الدوران س ب من المسقط الافقى ء لنقطة ح

بند ٨٨ وليلاحظ أيضا أن القوس المرسوم بنصف القطر ء ءَ يقطع دائما المستقيم م دَ فى نقطتين مثل ح ، حَ بحيث ان الوجه آ س ح يمكنه ان يأخذ عند تدويره حول س ب وضعين اثنين يكون الحرف س آ فى كل وضع منهما موجودا فى المستوى الغير المحدود س ء د أو س م دَ ففى أحد هذين الوضعين تقف نقطة ءَ عند نقطة ح وفى الوضع الثانى تقف عند حَ وبناء على ذلك اذا طبقت هذه النقطة الاخيرة حول س ب كما طبقت النقطة الاولى حوله انتقلت الى نقطة ءً وحينئذ فيكون الوجه ءً س ب هو مقدار الوجه الثالث المجهول وعلى ذلك يرى أنه يوجد زاويتان مجسمتان ثلاثيتان مختلفتان يمكن تركيبهما بواسطة المعاليم الموجودة وهى ا ، ب ، ب وهذه الحالة مشابهة بالكلية لما يحصل عندما يراد رسم المثلث المستقيم الاضلاع من بعد معرفة ضلعين من اضلاعه والزاوية المقابلة لاحدهما

وانى لا اظن أن الامر ليس محتاجا لان أزيد على ذلك قولى انه اذا لم يقطع القوس المرسوم بنصف القطر ء ءَ المستقيم م دَ فى نقطتين بل كان مماساله فى نقطة واحدة فلا يكون للمسئلة سوى حل واحد وأنها تكون مستحيلة الحل اذا لم يتقاطع هذا القوس بالكلية مع المستقيم م دَ بأن كان لا قاطعا ولا مماساله

ومع ذلك ينبغى أن يلاحظ انه يجب اهمال الحل الثانى اذا وقعت نقطة حَ على المستقيم م دَ تحت المستقيم م ء أعنى فى حالة ما يكون القوس ءَ ح قاطعا للمستقيم م دَ تحت المستوى الافقى (وهذا بفرض ان المطلوب رسم الزاوية ب المعلومة فوق المستوى الافقى لا تحته سواء كانت حادة أو منفرجة) لاننا اذا اعتبرنا الحل الذى تقع فيه نقطة حَ تحت المستوى الافقى رأينا أن الزاوية المجسمة الحادثة مكونة بواسطة الوجهين ا ، ب وزاوية زوجية مكملة لزاوية ب وحيث ان هذه الزاوية معلومة

هنا

هذا بالرسم لا بمقدار جيبها فلا يمكن حينئذ ان يحصل فيها أدنى شك ولا شبهة من جهة
مقدارها الحقيقى وبناء على ذلك يعلم أنه ليس من الجائز اعتبار الزاويتين ب و ١٨٠° ـ ب
على حد سواء بدون تفريق بينهما بل الواجب ان تميز احداهما عن الاخرى لان الجسمة
الثلاثية الناشئة عن اعتبار احداهما تخالف التى تنشأ عن اعتبار الاخرى
ولهذا السبب أيضا ينبغى اهمال الحلين معا والجزم بأن المسئلة مستحيلة الحل بواسطة
المعالم الحسابية اذا وقعت كل من نقطتى ح و حَ تحت الافق م ه وبالجملة فان ذلك
لا يحصل الا اذا كانت الزاوية الزوجية ب منفرجة

بند ٨٩ (تنبيه مهم) هو اننا وان أورينا فى بند ٨٢ انه يمكن تحويل الثلاثة احوال
الاخيرة من الستة احوال المذكورة فى بند ٧٨ الى الثلاثة احوال الاول منها وذلك
بواسطة اعتبار الزاوية الجسمة المكملة للزاوية المعلومة كما علم حقيقة ذلك فى بند ٨٢
المذكور لكن حيث انه قد تتأتى أحوال يكون حل تلك المسائل فيها بطرق قائمة بذاتها
لا مبنية على اعتبار الزاوية المكملة ضروريا بل ربما كان نافعا قد التزم علماء هذا
الفن أن يقرروا لتلك المسائل الثلاث حلولا قائمة بذاتها ولكن لما كانت تلك الحلول
متوقفة على معرفة المستويات المماسة للسطوح المنحنية قد أخرنا ذكرها ولو كان موضعها
هو هذا الحين تمام ذكر الاشياء التى هى مبنية عليها فنوردها ان شاء الله تعالى فى بند ١٦٤
وفى البنود الثلاثة التالية له

(الفصل الخامس)

(فى كثيرى السطوح المنتظمة)

بند ٩٠ كثير السطوح يسمى منتظما متى كانت جميع أوجهه أى سطوحه مضلعات
منتظمة متساوية وكانت جميع زواياه الجسمة متساوية أيضا ولا يخفى أنه لا يوجد من
كثيرى السطوح ما يوفى لهذه الشروط سوى خمسة أنواع وهى
(أولا) ذو الاربعة سطوح المثلثية المنتظم وهو ما كان محدودا بأربعة أوجه كل منها
مثلث متساوى الاضلاع وكل ثلاثة منها مجتمعة مع بعضها حول رأس واحده
(ثانيا) ذو الثمانية سطوح المثلثية المنتظم وهو ما تكون من ثمانية مثلثات متساوية
الاضلاع ومجتمعة مع بعضها أربعة فأربعة

(ثالثا) ذو العشرين سطحا المثلثية المنتظم وهو ما تكون من عشرين مثلثا متساوية الاضلاع ومجتمعة مع بعضها خمسة فخمسة

(رابعا) ذو الستة سطوح المربعة المنتظم الذي يسمى في الغالب بالمكعب وهو ما تركب من ستة سطوح كل منها كناية عن مربع وكل ثلاثة منها مجتمعة مع بعضها حول رأس من رؤسه

(خامسا) ذو الاثني عشر سطحا الخمسية المنتظم وهو ما كان محدودا باثني عشر سطحا كل واحد منها كناية عن مخمس منتظم وكل ثلاثة منها مجتمعة حول رأس واحدة

اما كونه لا يوجد من كثيري السطوح المنتظمة سوى هذه الانواع الخمسة المتقدمة فلانه لو أخذ من الاوجه المثلثية أو المربعة أو المخمسة أعدادا أكثر مما تقدم واريد جمعها حول نقطة واحدة لفاق مجموع الزوايا السطحية عن ٣٦٠ درجة أو كان مساويا لها بالاقل وبذلك لا يتيسر تكوين الزاوية المجسمة وأما الدليل على وجود هذه الانواع الخمسة فهو امكان انشائها على الوجه الآتي

بند ٩١ ذو الاربعة أوجه المثلثية المنتظم (شكل ٥٩ لوحة ١٥) لرسم هذا الجسم على مستويي المسقط يرسم أولا على المستوي الافقي مثلث متساوي الاضلاع بحيث يكون ضلعه مساويا الى الضلع المعلوم لـ لكثير السطوح الذي يراد انشاؤه وليكن هذا المثلث هو ا ب د ثم يقام من نقطة س مركز الدائرة المرسومة عليه مستقيم رأسي مثل (س و سَ عَ) مساو للضلع س ك من المثلث القائم الزاوية ا س ك المنشأ بجعل ا س قاعدة له وبعد ا ك المساوي الى ا ب وترا

فاذا وصل بعد ذلك من النقطة (س و سَ) الى الثلاثة رؤوس الاصلية تحصل بالضرورة جسم محاط بأربعة مثلثات متساوية الاضلاع ومتساوية وكانت بالضرورة الزوايا المجسمة الثلاثية المتكونة من اجتماع كل ثلاثة أوجه مع بعضها متساوية أيضا

بند ٩٢ ذو الثمانية أوجه المثلثية المنتظم (شكل ٦٠ لوحة ١٥) لرسم هذا الجسم نرسم اولا في المستوي الافقي مربعا ضلعه يساوي لضلع الجسم الذي يراد انشاؤه الذي نرمزله بحرف لـ وليكن (ا ب حـ د و اَ حَ) هو هذا المربع ثم يقام من مركزه (س و هَ) مستقيم رأسي يمد تحت وفوق نقطة هَ ويؤخذ عليه بالابتداء من هذه النقطة وفي جانبيها بعدا سَ هَ و شَ هَ متساويين وكلاهما يساوي نصف القطر سـ ب فلو وصلنا بعد ذلك من نقطتي (سَ و سـ) و (شَ و سـ) الى اربعة رؤوس المربع

يحدث

لحدث جسم مركب من هرمين رباعيين تكون أوجههما بالضرورة مثلثات متساوية الاضلاع لانا كاننا دورنا المربع ا ب حء ربع دورة حول قطره ا ح أو ب ء وأيضا تكون الزوايا المجسمة التى رؤوسها فى (سه و سَه) و (ا و اَ) و (ب و بَ) و ..... متساوية لان كلامنها تابع لهرم رباعى مساو الى الهرم الاول (سه ا ب حء و سَه اَ بَ حَ ءَ)

بـ٩٣ـد ذو العشرين سطحا المثلثية المنتظم (شكل ٦١ لوحه ١٥) لرسم هذا الجسم نرسم بواسطة الضلع ل الذى هو ضلع الجسم المطلوب فى مستو افقى حيثما اتفق مخمس منتظم مثل (ا ب حء ے و بَ اَ بَ حَ) ثم يبحث عن نقطة كنقطة (سه و سَه) من نقط المحور الرأسى بحيث اذا وصل منها الى رؤوس المخمس حدثت خمسة مثلثات متساوية الاضلاع ولذلك يكفى بالضرورة ان ننشئ على القاعدة س ء مثلثا قائم الزاوية مثل ء س ع بحيث يكون وتره ء ع مساويا الى ل أعنى الى ء ے فيكون حينئذ ضلع س ع من هذا المثلث دالا على الارتفاع المجهول ا سَ للهرم الخماسى (س ا ب حء ے و سَ بَ حَ) ثم نرسم داخل مستو كالمستوى قمَ الافقى الذى سيعين فيما بعد بعده عن مستوى بَ حَ مخمسا ثانيا مثل لم ه و مساويا للخمس ا ب حء ے ومتحد المركز معه لكنه منحرف عنه انحرافا بحيث تكون رؤوسه ل و م و ه و ..... موضوعة فى منتصفات الاقواس الموترة بالاضلاع حء و ء ے و ے ا و ..... من محيط الدائرة المرسومة على هذا المخمس ثم بعد ذلك نأخذ البعد دَسَ مساويا الى اَ سَ وننشئ الهرم الخماسى (س لم ه و و سَ قمَ) فيكون بالضرورة مساويا للهرم السابق ثم بعد ذلك نوصل من كل رأس من رؤوس المخمس العلوى الى الرأسين المجاورين لها من المخمس السفلى مثلا نوصل الرأس (حو حَ) مع (و وَ) و (لو لَ) والرأس (ء و ءَ) مع (ل و لَ) و (م و مَ) و ..... فتحصل حينئذ منطقة وسطى مركبة من عشرة مثلثات تكون متساوية الساقين من طبيعتها ينبغى تحويلها الى أخرى متساوية الاضلاع وهذا لا يتأتى الا بانتخاب البعد بَ وَ الواقع بين مستويى المخمسين الذى لم نتكلم فى الاول على كيفية تعيينه انتخابا ملائما وحيث انه يكفى لجعل المستقيم (حل و حَ لَ) مساويا الى لو أن ننشئ مثلث لحك بوتر مثل لك مساو الى لو فضلع حك يكون هو فرق الاستواء اللازم وجوده بين ح و ل أو هو بعد بَ وَ اللازم وضعه بين المخمسين المتوازيين وبذا يكون

جسم محاط بعشرين مثلثا متساوية الاضلاع مجتمعة خمسة فخمسة وتكون أيضا الزوايا المجسمة متساوية لانه يمكن أن يتصور فى كل رأس مثل (حـ و حَ) و (د و دَ) و.... وجود هرم خماسى مماثل للهرم الاول (سه ا ب حـ د ى و سَه بَ حَ) وهو المطلوب

بند ٩٤ ذو الستة سطوح المربعة المنتظم المعروف بالمكعب (شكل ٦٢ لوحه ١٥) لرسم هذا الجسم يرسم أولا المربع ا ب حـ د فى المستوى الافقى بحيث يكون ضلعه مساويا اضلع المكعب المطلوب رسمه ثم يقام من رؤوس زواياه الاربع رأسيات كالرأسيات (ا و اَ اَ) و (ب و بَ بَ) و...... متساوية وكل منها يساوى الى ا ب فاذا وصل بين النهايات العليا لهذه الرأسيات باضلاع مربع اخر تحصل مباشرة الجسم المطلوب الذى اصطلح على تسميته بالمكعب

بند ٩٥ ذو الاثنى عشر سطحا المخمسية المنتظم (شكل ٦٣ لوحه ١٥) لرسم هذا الجسم نرسم أولا فى مستو أفقى حيثما اتفق مثل بَ اَ هَ مخمسا منتظما كالمخمس ا ب حـ د هـ كل ضلع من اضلاعه يساوى ضلع كثير السطوح الذى يراد رسمه ثم يضم الى كل رأس من الرؤوس الخمس (ا و اَ) و (ب و بَ) و (حـ و حَ) و.... مخمسان مساويان للمخمس الاول ومماثلان عليه بحيث يتكون من الجميع خمس زوايا مجسمة ثلاثية وبذا يتحصل جسم كالطربوش محاط بستة مخمسات محدود من الاسفل بالمحيط (ك ر س ط ى لا ص ع ح ز و كَ رَ سَ طَ ى لاَ صَ عَ حَ زَ) الذى سنبين لك عن قريب طريقة ابعاده مسقطيه ثم نرسم أيضا فى المستوى الافقى مخمسا آخر كالمخمس لم ن ف ه مساويا للمخمس ا ب حـ د ى ومتحد المركز معه لكنه منحرف عنه انحرافا بحيث تكون رؤوس زواياه فى منتصفات الاقواس الموترة بالاضلاع ا ب و ب حـ و.... فى الدائرة المرسومة عليه وننشئ بعد ذلك على المخمس لم ن ف ه المذكور طربوشا مقعرا أى مقلوبا بعكس وضع الطربوش الاول ثم نرفع هذا الطربوش بطول الخط الرأسى (و و لَ اَ) الى ان تتحد زواياه البارزة والداخلة مع الزوايا الداخلة والبارزة من الطربوش الاول ولا يخفى أن جميع ذلك ممكن حيث لم يكن الغرض منه سوى أن تجتمع فى كل رأس من رؤوس المحيط ثلاثة مخمسات مماثلة للتى كونت الزاوية المجسمة الثلاثية (ا و اَ) أو (ب و بَ) أو الخ

ولكن لم يبين الآن مقدار المسافة الرأسية تَ تَ٢ التى تفصل مستويى المخمسين الافقيين

عن

عن بعضهما فباجتماع هذين الطربوشين مع بعضهما يحصل كثير سطوح مركب من اثنى عشر مخمسا منتظما متساوية وزواياه المجسمة الثلاثية تكون متساوية أيضا لان كلا منها مركب من ثلاثة مخمسات متساوية

ولاجل رسم مسقطى هذا الجسم مع الايضاح الكافى نبتدى أولا بالطربوش السفلى فنجعل قاعدته لم ه ف ه فى مستو أفقى مثل ت ه مَ مأخوذ بالاختيار ثم نطبق على هذا المستوى الاوجه الثلاثة المخمسية من المجسمة الثلاثية (ه و هَ) ولذلك نرسم المخمسين ف ص ع ح ه و ه حَ ز ك ل مساويين الى المخمس لم ه ف ه ثم نجرى على هذين المخمسين عملية مماثلة للتى يجب اجراؤها فى حالة ما يراد تعيين الزوايا الزوجية من هذه المجسمة الثلاثية كما فى بند ٨٣ بان نتصور قيامهما من رقدتهما بتدويرهما حول ضلعى ف ه و ه ل الى أن يتحد منهما الضلعان المنطبقان فى ه ح و ه حَ ويصيرا مستقيما واحدا وفى أثناء هذا الدوران لا تخرج النقطتان المنطبقتان فى ح و حَ عن المستويين الرأسيين ح ا العمودى على ف ه و حَ ب العمودى على ه ل وهذان المستويان يتقاطعان فى الخط الرأسى ح الذى تجتمع عليه نقطتا ح و حَ وتصيران نقطة واحدة عندما تتركب الزاوية المجسمة وبناء على ذلك تكون نقطة ح مسقطا أفقيا لاحدى رؤس كثير السطوح المطلوب ويكون أيضا المستقيم ح ه مسقطا أفقيا لاحد اضلاعه وينبغى ان يمر المستقيم ح ه بالمركز و اذا امتد نحوه ثم لاجل تعيين المسقط الرأسى حَ لهذه النقطة يلاحظ ان هذه النقطة الفراغية رأس لمثلث قائم الزاوية قاعدته هى ح ا ووتره هو ا ح فلو رسم حينئذ مثلث ا ح ء بهذه المعالم لكان ضلعه ح ء مبينا للارتفاع ت تَ الذى ينبغى وضعه على المستوى الرأسى للمسقط لاجل الحصول على المسقط الرأسى حَ بان يمد من نقطة تَ الافقى تَ سَ ويقام من ح مستقيم عمودى على خط الارض الى ان يقابل ذلك الافقى فى نقطة حَ المذكورة وبذا يتعين الضلع حَ هَ

ومما يجب التنبيه عليه هنا هو انه كان يمكن تعيين الارتفاع المجهول ت تَ بطريقة أخرى حيث كان المسقط الافقى ح ه لضلع من اضلاع الجسم وحقيقة هذا الضلع المساوية الى ف ه معلومين ويكفى لذلك انشاء مثلث قائم الزاوية قاعدته ح ه ووتره ف ه

فضلعه الثانى يبين لنا الارتفاع ت تٍ المطلوب تعيينه

والرأس المنطبقة فى نقطة ع من المحقق انها عند قيام الوجه صه ع ع وف حول ضلع وف لاتخرج عن المستوى الرأسى ع ع و العمودى على محور الدوران وف وأن بعدها الحقيقى عنه أو البعد الاصغر بينهما وهو ع ع ينتهى بأن يأخذ وضعا موازيا الى ا ى فاذا مد حينئذ هذا الاخير الى ان يصير البعد ا هٍ منه مساويا الى ع ع وانزل الرأسى ه ه ثم نقلت نقطة ه الى نقطة ع على المستقيم ع ع كانت نقطة ع هى المسقط الافقى للرأس المنطبقة فى ع التى أريد تعيين مسقطها

واما مسقطها الرأسى ع فانه يتعين بملاحظة انه ينبغى ان يكون موجودا على ارتفاع مثل ت تٍ مساو الى ه ه وكان يمكن أيضا ايجاد نقطة ع بملاحظة انه لداعى مماثلة الطربوشين لبعضهما ينبغى ان يكون البعد ب ع مساويا الى وح الذى علم من قبل وكذا يمكن تعيين الارتفاع ت تٍ من هذا الاعتبار الآتى وهو ان المستقيم المنسقط على ع ع طوله الحقيقى يساوى الى ع و م

وأخيرا الارتفاع تٍ تٍ للطربوش العلوى ينبغى بالضرورة أن يؤخذ مساويا الى ت تٍ وبعد ذلك يمكن تعيين المساقط الرأسية اً و ىً وحً وىً وهً المقابلة للنقط ا ب وح و ى وه ثم تعين بمثل ذلك النقط زً وىً و رً و . . . بعد ان ترسم الابعاد حز ، ى ك و ى ر و . . . مساوية كلها الى البعد وح الذى عرفناك طريقة ايجاده آنفا

(الباب الثانى)

فى الخطوط المنحنية والسطوح وطرق تولدها والمستويات المماسة لهما

(الفصل الاول)

فى الخطوط المنحنية على العموم ومماساتها وخواصها

بند ٩٦ ليس مقصودنا ان نطيل الكلام هنا على المنحنيات ولا ان نشرح أنواع المنحنيات الموجودة شرحا تفصيليا فان الهندسة الوصفية ليست محل ذلك اذ لا يخفى ان المنحنيات المعروفة كثيرة العدد ولها كتب خاصة بها وفيها يتكلم على جميع أنواع

المنحنيات

المنحنيات وخواصها وطرق رسمها ورسم مماساتها المختلفة وجميع ما يلزم لها وانما مقصودنا ان نذكر هنا بعض تعريفات عمومية على المنحنيات ومماساتها المختلفة وهي التي تلزم لنا في دراسة بعض نظريات ومسائل علم الهندسة الوصفية الذي نحن مشتغلون به الآن وذلك من باب التسهيل على طالب هذا العلم ولكي يستغني بوجودها في هذا الكتاب عن مراجعتها في كتب المنحنيات المخصوصة فنقول

يطلق عموما اسم خط على المحل أو المسار الهندسي للاوضاع المختلفة التي تأخذها نقطة تتحرك بكيفية وشروط مخصوصة فان كانت تلك النقطة تتحرك داخل مستو ثابت كانت جميع نقط الخط المتولد من حركتها موجودة في هذا المستوى الثابت ويقال للخط في هذه الحالة خط مستو وأما اذا خرجت ولو بعض أوضاع النقطة المتحركة عن هذا المستوى سمي الخط المتولد خطا شعاليا أو مضاعف الانحناء

وكلمة خط كلمة عمومية تشمل المستقيم والمنحني ففي المستقيم تكون الاوضاع المتتالية للنقطة الراسمة موجودة على استقامة واحدة وفيما عدا ذلك يقال للخط الحادث منحن وعلى العموم اذا لم يحصل تغيير في قانون أو شروط تحرك النقطة الراسمة للخط فانه يكون مستمرا ليس به زوايا ولا نقط وقوف فيمتد الى غير نهاية كالمستقيم مثلا أو يلتف على نفسه كالدائرة مثلا وذلك فيما عدا بعض الاحوال الاستثنائية التي يكون فيها للخط بعض نقط وقوف ولو لم يتغير قانون تولده لكننا لا يلزم لنا أن نشغل انفسنا بهذه الاحوال الغريبة أي الغير عمومية لانه ليس لها أقل اهمية في المسائل اللازم لنا مدارستها

بند ٩٧ اذا أخذ مستقيم مثل م ه (شكل ٦٤ لوحة ١٦) قاطع لمنحن معلوم في نقطتين كنقطتي م و ه ودوّر حول احداهما وهي م مثلا أخذت نقطة التقاطع الثانية على التوالي أوضاعا مثل ه١ و ه٢ و ه٣ و ه٤ و ... الخ فلا بد وان يوجد فيها وضع تتحد فيه نقطة ه المتحركة مع نقطة م فيقال للقاطع في هذا الوضع الوحيد مماس فيفهم من ذلك حينئذ أن المماس لمنحن ما هو الوضع النهائي للمستقيم القاطع للمنحني المذكور عندما تتحد نقطتا تقاطعه بالمنحني وتصيران نقطة واحدة أو هو المستقيم الذي لا يشترك مع المنحني الا في نقطة واحدة

ويقال ان المنحنيين متماسان في نقطة ما متى كان لهما فيها مماس واحد

بند ٩٨ المستقيمان المماسان لمنحن واحد في نقطتين متقاربتين من بعضهما يوجدان على العموم في جهة واحدة من المنحني المذكور وهي جهة تحديبه وذلك كما هو مشاهد

فى (شكل ٦٥) من وضع المماسين ا ب حـ ، اَ بَ حَ للمنحنى م ٥

لكن قد توجد أحوال فيها يكون المماسان لمنحن واحد فى نقطتين متقاربتين مثل نقطتي ا و ب (شكل ٦٦) موجودين فى جهتين مختلفتين بالنسبة للمنحنى المفروض ففى مثل هذه الحالة يحكم بأنه لا بد من أن توجد بين نقطتي ا و ب نقطة مثل م يكون المماس للمنحنى فيها جزء موجود فى احدى جهتى هذا المنحنى وجزء آخر فى الجهة الثانية وتلك النقطة هى ما تسمى بنقطة الانقلاب لأنه يتراءى للمشاهد ان المنحنى قد انقلب فيها أعنى أنه قد غير جهة تحديبه فى هذه النقطة فاذا فرضنا أن المستقيم س ب ا ينتقل من وضعه ويأخذ أوضاعا أخرى بشرط أن لا يزال مماسا للمنحنى ولكن فى نقط تتقارب من نقطة م شيأ فشيأ رأينا أن نقطة تقاطعه بالمنحنى وهى ب ا تقرب من نقطة ب المتحركة معها شيأ فشيأ بحيث بأى وقت تتحد فيه هاتان النقطتان مع بعضهما فى نقطة م ومن ذلك يرى أن المماس للمنحنى فى نقطة الانقلاب م وهو س سَ يكون تماسه مع المنحنى المذكور أقوى وأمتن من التماس المعتاد حيث اجتمعت فيه نقطة تماس ونقطة تقاطع مع بعضهما وفى هذه الحالة يكون للمماس عنصران اثنان مشترك كان بينه وبين المنحنى احدهما هو العنصر الذى كان مشتركا بين المماس فى وضعه الاول وبين المنحنى والثانى هو العنصر الذى تكون من انضمام نقطة التقاطع التى كانت فى ب ا مع نقطة الانقلاب م بخلاف التماس الاعتيادى أو البسيط فان المستقيم المماس فيه لا يشترك مع المنحنى الا فى عنصر واحد وهو الحادث من انضمام نقطتى تقاطع القاطع الاصلى عند ما يصير مماسا

فيفهم مما ذكر أن تماس المستقيم بالمنحنى ليس على حالة واحدة بل هنالك جملة رتب من التماس فالتماس المعتاد أو البسيط هو التماس برتبة أولى وهو ما كان فيه عنصر واحد خطى مشترك بين المماس والمنحنى وذلك كمماس الدائرة مثلا والتماس الذى رأيناه فى نقطة الانقلاب م (شكل ٦٦) هو التماس برتبة ثانية وهو تماس أقوى من ذى الرتبة الاولى حيث اشترك فيه المماس مع المنحنى فى عنصرين خطيين بدل عنصر واحد خطى وهنالك تماسات ذوات رتب أعلى من ذلك فيقال تماس برتبة ثالثة متى وجدت ثلاثة عناصر خطية مشتركة بين المماس والممسوس ويقال تماس برتبة رابعة اذا كانت العناصر المشتركة أربعة وهكذا

المستقيم س سه المماس للمنحنى فى نقطة الانقلاب م (شكل ٦٦ لوحه ١٦) هو الحد الفاصل بين القواطع التى مثل ط ه القاطعة للمنحنى فى ثلاث نقط وبين التى لا تقطعه سوى فى النقطة الفريدة م كالقاطع لا لاَ مثلا

متى تحرك المستقيم المماس ب ب حالة كونه مماسا على الدوام للمنحنى فانه يدور فى جهة معلومة حتى يصير مماساله فى نقطة الانقلاب م ثم يأخذ بعد ذلك أوضاعا موازية للاوضاع التى كان يأخذها قبل مروره بنقطة م وحينئذ فلو تصورنا وجود مستقيم ثابت فى مستوى المنحنى ومماسه المتحرك لعلمنا أن المماس يصنع مع هذا المستقيم زاوية متغيرة تبعا لتغير وضع المماس المتحرك وهى اما أن تأخذ فى الكبر شيأ فشيأ الى أن تبلغ نهاية ازديادها عندما يمر المماس بنقطة الانقلاب ثم تأخذ فى الخسة ثانيا بعد تجاوز المماس لهذه النقطة اذ علمنا أن الاوضاع التى يأخذها المماس بعد ذلك تكون موازية على التناظر لاوضاعه الاول واما أن تتغير هذه الزاوية الابتدائية بالنقص شيأ فشيأ حتى يصل المماس الى نقطة الانقلاب فتبلغ نهاية نقصها وترجع بعد ذلك آخذة فى الازدياد شيأ فشيأ ومن ذلك يعلم أن المماس لمنحن مّا فى أى نقطة من نقط انقلابه يصنع مع أى مستقيم ثابت موجود معه فى مستو واحد زاوية أكبر أو أصغر الزوايا التى تصنعها بقية المماسات مع هذا المستقيم الثابت وتلك خاصية يتميز بها هذا المماس فى نقطة الانقلاب عما سواه من المماسات وتستعمل لاجل تعيينه كما سنرى ذلك فى محله انشاء الله تعالى

بند ٩٩ وقد يكون للمنحنى أحيانا نقطة رجوع وهى النقطة التى فيها يغير المنحنى المذكور جهة سيره الاصلية راجعا الى الجهة التى أتى منها وذلك كما (فى شكلى ٦٧ و٦٨ لوحه ١٦) ولاجل تصور الكيفية فى تكون مثل هذه المنحنيات يقال ان سرعة سير النقطة الراسمة لما تأخذ فى النقص شيأ فشيأ الى أن تنعدم فى نقطة الرجوع م وتصير صفرا ثم تأخذ ثانيا فى الزيادة تدريجا مغيرة اتجاه سيرها الاصلى وآخذة اتجاها مضادا له بحيث يكون تغير اتجاه المماس مستمرا

ويقال لهذا الرجوع رجوع من الرتبة الاولى أو من الرتبة الثانية بحسب وجود شعبتى المنحنى الراجع فى جهة واحدة بالنسبة للمماس م سه وعدمه فان كان الشعبتان موجودتين فى جهة واحدة من هذا المماس (كما فى شكل ٦٧) قيل للرجوع رجوع من الرتبة الاولى وان كان كل واحد منهما موجودا فى جهة مخصوصة كما فى (شكل ٦٨)

قيل له رجوع من الرتبة الثانية

بنـــد وهنـاك منحنيات يكون لها نقطة مزدوجة وتسمى أيضا نقطة العقدة وهى التى تنعقد فيها شعبتا المنحنى وذلك كما فى (شكل ٦٩ لوحه ١٦) الذى يرى فيه ان شعبتى المنحنى ا م ح م ء المعلوم منعقدتان فى نقطة م التى تسمى من أجل ذلك بنقطة العقدة وعلى العموم يعطى اسم نقطة مضاعفة الى النقطة التى يمر بها جملة اقواس من منحن واحد وذلك كالنقطة م التى فى (شـكل ٧٠) وكما انه يمر بهذه النقطة جملة أقواس من المنحنى فكذلك يكون لهـذا المنحنى فى هذه النقطة مماسات مختلفة بقدر عدد تلك الاقواس لكل قوس منها مماس مخصوص

بنـــد الخط المستقيم هو أبسط الخطوط المنحنية اللانهائية أى التى تمتد الى مالانهاية فاذا اعتبرنا مستقيما مثل ا ب (شكل ٧١ لوحه ١٦) ومستقيما آخر ح ء قاطعا له ودور هذا الاخير حول احدى نقطه مثل ح مثلا بحيث تأخذ نقطة التقاطع ء على التوالى اوضاعا مختلفة مثل ء و ءَ و . . . . الخ حالة كونها آخذة فى التباعد جهة الشمال الى مالانهاية ففى وضع ما يصير بالضرورة المستقيم القاطع المتحرك موازيا الى ا ب وتنتقل حينئذ نقطة التقاطع الى بعد لانهائى وفى هذه الحالة لايمكن الحكم على نقطة التقاطع بانها هل هى موجودة فى نهاية المستقيم ا ب من الجهة اليسرى أو فى نهايته اليمنى لكن متى استمر المستقيم المتحرك فى الحركة بعد الوضع الموازى رأينا أن نقطة التقاطع التى كانت على بعـد لانهائى قد اخذت فى الاقتراب شيأ فشـيأ عائدة من الجهـة اليمنى للمستقيم ا ب حتى تصير فى البعد المحدود بعد ان كان بعدها لانهائيا وحيث الامر كذلك فالاحرى حينئذ هو أن نعتبر المسـتقيم ا ب كمنحن مقفول ونقطة انضمام شعبتيه الممتدتين فى جهتين متضادتين موجودة على بعد غير محدود أو لانهائى

وعليه فتى وجد أن منحنيا ممتدا الى مالانهاية لزم أن يعلم ان له نقطة لانهائية لكنه لا يقف فيها ولا فيما عداها بل لابد أن يكون له شعبة ثانيـة غير شعبته الاولى ممتدة نحو هذه النقط اللانهائية ومتصلة بالشعبة الاولى فيها كما شوهد ذلك فى المستقيم

ولابد من أن يكون لكل منحن فروع لانهائيـة بقدر ماله من النقط اللانهائية وان يكون لكل فرع منها شعبتان متصلتان ببعضهما فى النقطة اللانهائية

ولبيان ذلك نمثل لك بالمنحنى المبين فى (شـكل ٧٢ لوحه ١٧) الذى يعرف بالقطع الزائد فهذا المنحنى له نقطتان لانهائيتان أى موجودتان على بعد لانهائى ولذا كان له فرعان

مثل

مثل ا ب ح و وهو كلاهما ذو شعبتين ممتدتين الى ما لا نهاية وشعبتا كل منهما تتصلان ببعضهما فى النقطة اللانهائية التى تميل كلتاهما للوصول اليها

والمماس لمنحن لانهائى فى نقطته اللانهائية قد اعطى له اسم مخصوص ليتميز به عن سائر المماسات التى نقط تماسها محدودة وهذا الاسم هو الخط التقربى وبقدر ما يكون للمنحنى من النقط اللانهائية يكون له خطوط تقربية فالقطع الزائد مثلا له خطان تقربيان هما ىىَ و ررَ لان له نقطتين لانهائيتين فهما امتداد فرعا القطع الزائد ومهما امتد معهما الخطان التقربيان فانهما لا يقابلان الفرعين الا فى نقطتيهما اللانهائيتين ويكونان مماسين لهما فى هاتين النقطتين

ولاجل الحصول على الخط التقربى لمنحن تستعمل الطريقة التى يجب اجراؤها للحصول على أى مماس حيثما اتفق وذلك ان يؤخذ قاطع مثل مه ويحرك تحريكا بحيث تجتمع بسببه نقطتا التقاطع م و ه فى بعد لانهائى وتصيران نقطة واحدة ومن المعلوم انه اذا حرك مه تحريكا يبعد نقطتى م و ه عن بعضهما شيأ فشيأ الى ان تصيرا لانهائيتين فعند ذلك يمكن ان نعتبر أن طرفى المستقيم مه التصقا ببعضهما وصارا نقطة واحدة كما تقدم فى أول هذا البند ويصير اذ ذاك القاطع مه خطا تقربيا

بند ١٠٢ العمودى على منحن مّا فى احدى نقطه هو المستقيم المقام من تلك النقطة عموديا على مماس ذلك المنحنى فيها وحيث يمكن أن يقام من نقطة التماس جملة مستقيمات كلها عمودية على المستقيم المماس وكل واحد منها موجود مع المماس فى مستو مخصوص فجميع هذه المستقيمات يقال لها عمودية على المنحنى فى نقطة التماس المعتبرة

وحيثما يكون المنحنى المعلوم منحنيا مستويا يعطى على الخصوص اسم العمودى عليه فى نقطة معينة على المستقيم المقام من تلك النقطة عموديا على مماسه فيها الموجود فى مستوى ذلك المنحنى ومماسه

(مباسيط المنحنيات المستوية)

بند ١٠٣ اذا فرضنا منحنيا حيثما اتفق كالمنحنى ا ب ص (شكل ٧٣ لوحه ١٧) مرسوما فى مستو مّا وتصورنا انه منقسم الى جملة عناصر متساوية بان كان سَ=سَ=سَ= .... الخ ثم أقيم من منتصفات هذه العناصر العموديات المتجاورة جدا مح ومَحَ ومَحَ .... الخ فهذه العموديات تتقاطع مع بعضها تقاطعا متتاليا ويتكون من تقاطعاتها المتتالية منحن مثل ححَحَ .... الخ وتكون

كلها مماسة له والمنحنى ءدء المذكور الحاصر لجميع عموديات المنحنى الاصلى اب صه هو ما يسمى بمبسوط أو مفرود المنحنى اب صه وأما المنحنى اب صه فانه يسمى بالنسبة للمنحنى ءدء بالمنحنى الباسط أو الفارد له وسيظهر لنا سبب هذه التسمية فيما هو آت ومن المعلوم ان نقطة ح التى هى نقطة تقاطع العمودين مح ومَحَ القائمين من منتصفى العنصرين بت وتتَ المتساويين تكون بالضرورة متساوية الابعاد عن الثلاث نقط ب ت تَ وعليه فتكون نقطة ح المذكورة مركز الدائرة يكون بينها و بين المنحنى اصه عنصران مشترك كان هما بت وتتَ وحيث انه لا يمكن تكليف الدائرة بالمرور بأكثر من ثلاث نقط فتلك حينئذ هى الدائرة الوحيدة التى تقرب وتكاد أن تتحد مع المنحنى اصه بجوار نقطة ب زيادة عما سواها ولذا سميت بالدائرة الملاصقة لهذا المنحنى فى نقطة ب اما نصف قطر هذه الدائرة الملاصقة فانه على التحقيق عبارة عن أحد الخطوط الثلاثة حب=حت=حتَ التى يمكن استعواض كل منها تقريبا بأحد الخطين المتساويين حم , حمَ لان هذه المستقيمات المتنوعة ما خرجت عن كونها انصاف أقطار لدائرتين مرسومتين خارج وداخل المضلع بتتَ الوحيد ومن المعلوم انه عند النهاية أو عندما تعتبر العناصر صغيرة صغرا لانهائيا تتحد هاتان الدائرتان ببعضهما وتصيران كالدائرة الواحدة ومن ذلك ينتج أن المركز ح ونصف القطر مح للدائرة الملاصقة يتعينان بتقاطع عمودين قريبين جدا من بعضهما من عموديات المنحنى المعلوم

ولاجل البرهنة على ان المستقيم حم مساو للمستقيم حمَ نقول حيث كان العنصران متَ وتمَ متساويين فيكون مثلثا حمت , حمَت متساويين أيضا ومن تساويهما يثبت تساوى الضلعين حم , حمَ ثم ولبيان أنه لا فرق محسوس بين حم , حتَ نقول يؤخذ من مثلث حمتَ القائم الزاوية أن

$$\text{حم} = \sqrt{\overline{\text{حتَ}}^{2} - \overline{\text{متَ}}^{2}} = \text{حتَ}\left(1 - \frac{\overline{\text{متَ}}^{2}}{\overline{\text{حتَ}}^{2}}\right)^{\frac{1}{2}}$$

وبأخذ النهايات يرى انه عندما يصير العنصر متَ لانهائى الصغر فلا يكون هناك فرق بين حم , حتَ سوى كمية لانهائية الصغر من الرتبة الثانية يجب اهمالها ولو بالنسبة الى متَ واذن فيمكن ان يعتبر حم مساويا الى حتَ

بند ٤٠١ المستقيم مح هو ما يسمى أيضا بنصف قطر انحناء المنحنى اصه فى نقطة م

لانه

لانه بحسب كبر وصغر طوله يضعف انحناء ذلك المنحنى كثيرا أو قليلا وفى الواقع كذلك لاننا اذا أردنا أن نتصور حقيقة انحنا خط ما مثل ا ب صه نعتبره كضلع صار تكوينه بثنى المستقيم ب ت تَ تً ...... حول النقط ت و تَ و تً و .... الخ ومن البديهى أن الانحناء فى نقطة ت يكون مبينا بمقدار الانفراج الواقع بين العنصرين ت تَ و ت ت أعنى بزاوية التماس س ت سَ أو بالقوس هـ٢ الذى تقدر به تلك الزاوية فى الدائرة التى نصف قطرها الوحدة (زاوية التماس اسم للزاوية الواقعة بين قوس من منحن ما وبين المستقيم المماس له من طرفه) لكن زاوية س ت سَ مساوية لزاوية م ح مَ وتلك الزاوية شاملة للقوس م ت مَ المتحد مع الدائرة اللاصقة المرسومة بنصف القطر م ح وحينئذ فالقوس هـ٢ المشابه للقوس م ت مَ والمرسوم بنصف قطر مساو للوحدة يكون مقداره هو الآتى

$$\text{هـ}_2 = \frac{\text{م ت مَ}}{\text{م ح}} = \frac{\text{ت تَ}}{\text{م ح}} = \frac{\text{قاس}}{\text{نق}}$$

والرمز قاس يدل على أحد العناصر التى مثل العنصر ت تَ واما نق فهو رمز لنصف القطر م ح ومن حيث ان المنحنى ا ب صه منقسم الى عناصر متساوية فتكون الكمية قاس ثابتة واذن فيعلم من مناقشة مقدار هـ٢ المتقدم ان الانحنا المبين بالزاوية هـ٢ يتغير من نقطة الى اخرى من المنحنى ا ب صه بالنسبة العكسية لنصف القطر م ح = نق بمعنى انه اذا كبر نق قل الانحناء أى صار خفيفا وان صغر نق صار الانحناء كبيرا ومحسوسا

بـ ١٠٥ د (شكل ٣٧ لوحه ١٧) اذا أخذ خيط ليس قابل للانثناء مثل م ح حً ..... ولف على طول المنحنى المبسوط ثم ثبتت احدى نقط ذلك الخيط ولتكن ى مثلا وأعطى لجزئه المستقيم ح م طولا بحيث يصل طرفه لحد المنحنى الباسط ا ب صه ثم فك الخيط الملفوف على المبسوط فكاً تدريجيا مع جعله مشدودا على الدوام فان طرفه م يمشى بالضبط على المنحنى ا ب صه وفى الواقع كذلك لانه عندما تأتى نقطة تماس الخيط بالمبسوط من الوضع ح الى حَ يزيد الجزء المستقيم من الخيط وهو م ح = مَ ح بقدر ح حَ ويكون حينئذ طوله الكلى عبارة عن مَ ح + ح حَ = مَ حَ لكن من حيث ان هذا الخط الاخير مساو الى مَ حَ بمقتضى بـ ١٠٣ د فينبنى على ذلك ان الطرف المتحرك م يمر بالضبط بنقطة مَ ومثل ذلك يحصل فى جميع الاوضاع المتتالية للخيط الذى يمكن بواسطته حينئذ

رسم المنحنى الباسط بفكه من فوق منحنى المبسوط ومن ذلك ينتج ان أى قوس حيثما اتفق مثل حـ حَ من المبسوط يساوى الفرق نصفى قطرى الانحنا م حـ و مَ حَ المارين بطرفيه

وليلاحظ أيضا ان أى باسط مثل ا ب ص لا يقبل قط سوى مبسوط واحد لا غير وأما المبسوط الواحد الذى مثل د حـ ى فانه يقابل الى عدد غير متناه من البواسط لانه اذا أخذ على الخيط م حـ حَ ى جملة نقط مثل م و م ..... الخ فانها ترسم عدة منحنيات مختلفة مثل م مَ مَ ص و م مَ مَ ص و .... الخ كل منها باسط للمبسوط الواحد د حـ ى وجميع هذه البواسط لها اعمدة مشتركة بينها وهى متساوية الابعاد عن بعضها فى اتجاه هذه الاعمدة لكنها تختلف عن بعضها جدا من جهة خواصها ومعادلاتها

بـ تـنـبـيـه لاجل شرح بعض أمثلة بسيطة على نظرية المباسيط نقول انه اذا كان المنحنى ا ب ص (شكل ٧٣ لوحه ١٧) قطعا مكافئا ذا درجة ثانية لكان مبسوطه متركبا من فرعين غير محدودين مثل د حـ ى و د ىَ أحدهما موضوع فوق محوره ا ى والثانى تحته ويجتمعان مع بعضهما على هذا المحور فى نقطة د التى يحدثان فيها رجوعا وهذه النقطة متباعدة عن الرأس ا للمنحنى المكافى بالبعد ا د = ٢ ا ف = لنصف البعد الثابت من القطع المكافى والمستقيم ا د المذكور هو أيضا نصف قطر انحنا القطع المكافى فى الرأس ا

وفى القطع الناقص ا ب د هـ (شكل ٧٤ لوحه ١٧) الذى نصفا محوريه هما و ا ورمزه ا ثم و ب ورمزه ب يكون المبسوط منحنيا مثل ا ب د هـ مركبا من أربعة فروع يتكون بينها أربع نقط من نقط الرجوع وابعاد هذه النقط عن رؤس القطع الناقص هى الآتية

$$ا ا = د د = \frac{ب^{٢}}{ا} \quad و \quad ب ب = هـ هـ = \frac{ا^{٢}}{ب}$$

وهذه الابعاد هى أيضا مقادير لانصاف اقطار الانحنا فى الرأسين ا و ب لان الفرعين ا ب و ب د يستعملان لرسم نصف القطع الناقص ا ب د وأما الفرعان الآخران وهما ا هـ و هـ د فانهما متعلقان بالنصف الاسفل ا هـ د

وفى الدائرة يؤول المبسوط الى نقطة واحدة وهى المركز ويكون نصف قطر الانحنا على الدوام

الدوام مساويا لنصف قطر الدائرة المعلومة نفسها

بند ١٠٦ فاذا فرضنا الآن أن المبسوط هو المعلوم وأنه دائرة كالدائرة م غ غً ... (شكل ٧٥ لوحه ١٧) التي مركزها و واريد ايجاد باسط هذا المبسوط فاذا تتبعنا القاعدة المتقدمة في البند السابق وأخذنا خيطا لينا ولففناه على الدائرة المعلومة وفرضنا ان طرفه الذي سيتحرك كان منطبقا على محيط الدائرة في نقطة م ثم فك الخيط تدريجا بعد ان تثبت منه نقطة مثل نقطة غ فلاشك أن نقطة م ترسم في أثناء حركتها منحنيا مثل م مَ مً ... مْ يكون هو باسط أو فارد الدائرة التي مركزها و

لكن يمكن ايجاد هذا الباسط أيضا بطريقة رسمية ولذلك يقسم محيط الدائرة الى أجزاء متساوية ولتكن اثنى عشر مثلا ثم يؤخذ على المماسات غ مَ و غً مً و غًّ مًّ و ... الخ ابعاد مساوية الى ١/١٢ و ٢/١٢ و ٣/١٢ و ٤/١٢ و ... الخ من طول محيط الدائرة فتحصل النقط مَ و مً و مًّ و ... مْ و ... الخ التي اذا جمعت بخط متصل تحصل الباسط المطلوب ولاجل جمع هذه النقط بمنحن يكفي هنا أن نجعل النقط غَ و غً و غًّ و ... الخ مراكزا والمماسات غ مَ و غً مً و ... الخ انصاف أقطار وترسم جملة أقواس من دوائر تتصل مع بعضها ويتكون عن مجموعها الباسط المطلوب لان انصاف الاقطار المذكورة هي انصاف اقطار الدوائر الانطباقية للمنحني م مَ مً ... مْ المطلوب ايجاده

وهذا الباسط م مَ مً ... مْ ... الخ هو حلزون غير محدود نقطة أصله هي م بل يمكننا أيضا أن نعتبر الحلزون ملاء المماثل للحلزون المتقدم كفرع آخر من الباسط المذكور وأن هذين الفرعين ليسا الا كمنحن واحد ناشئ من التحرك المستمر لنقطة واحدة وفي الواقع كذلك لاننا اذا وضعنا الخيط الملفوف على المبسوط بمستقيم غير قابل للانثناء وغير محدود مثل المستقيم ا ب اَ وتصورنا ان هذا المستقيم يدور بدون انزلاق حول الدائرة م غ غً ... الخ مع بقائه على الدوام مماسا لها فمن الواضح أن كل نقطة مثل ا ثابتة على هذا المستقيم تأخذ على التوالي أوضاعا مثل مًّ و مً و مَ ... الخ الى أن تأتي في نقطة الاصل م وبعدها اذا استمر تحرك المستقيم في جهة سيره الاصلية يرى أن

نقطة ا التي رسمت المنحنى ام مَ مَمَ م تصير بعد ذلك خلف نقطة التماس وترسم بدون انقطاع الفرع م لا ء الذي يجب اعتباره بناء على ذلك فرعاً أو جزأ من المنحنى الاول م مَ مً... الخ لا منحنيا قائماً بذاته ومما يجب أن يلاحظ أيضاً وان طريقة ايجاد الباسط هذه بواسطة دوران مستقيم غير قابل للانثنا حول مبسوطه هي وان كانت توصل هي والطريقة المتقدمة في بند الى نتيجة واحدة وهي ايجاد الباسط لكن الطريقة الحالية أعم من المتقدمة بل قد يكون العمل بها ضرورياً عند ما يكون المبسوط المعلوم مشتملاً على نقط رجوع كما في القطع الناقص والقطع المكافى وما اشبههما الا انه ان لم تستعمل هذه الطريقة واستعملت الاولى كان من اللزوم تغيير نقطة ثبات الخيط لاجل نقله من فرع الى آخر

(الفصل الثاني)

(في تعاريف السطوح وفي طرق تولدها وأنواعها)

بند ١٠٧ يطلق على العموم اسم سطح على المحل الهندسي لجميع الاوضاع التي يأخذها على التوالي خط ما يتحرك مغيراً وضعه بل وأحياناً هيئته على حسب قانون معين مستمر وينتج من هذا التعريف أنه لا يجوز اطلاق كلمة سطح على مجموع عدة نقط أو عدة منحنيات متقاربة من بعضها أمكن وليس بينها أدنى ارتباط أو علاقة ثابتة بل يلزم لاجل أن يصح اطلاق كلمة سطح على هذا المجموع أن تكون هذه النقط أو تلك الخطوط منقادة لبعض روابط مشتركة بينها ومستمرة وتلك الروابط او الشروط هي التي اذا ترجمت بالاصطلاح الجبري كانت ترجمتها عبارة عن معادلة ذلك السطح

الخط المتحرك الذي عليه تولد السطح يسمى راسم الذلك السطح والقانون المعين المستمر الذي على حسبه يتحرك الراسم هو عبارة عن عدة شروط موضوعة يجب أن ينقاد لها الراسم في أثناء حركته حتى لا يكون وضعه وهيئته في أي نقطة فراغية مر بها اختيارين بل يكون ذا وضع مخصوص وهيئة معينة وأوفق الوسائط التي جرت العادة باستعمالها لبيان قانون حركة الراسم هي أن يعين خط واحد أو جملة خطوط ثابتة تسمى بالادلة وواحدها دليل ويكلف الراسم دواماً بالاتكاء عليها في جميع أوضاعه واذن يلزم لاجل تحديد سطح مخصوص تحديداً تاماً أن يبين جنس الراسم وكيفية تحركه وتعيين الادلة التي يكلف هذا الراسم بالاتكاء عليها في أثناء حركته وبتغيير الادلة وحدها تتحصل جملة سطوح تابعة لعائلة واحدة وأيضاً يجب أن يلاحظ أن السطح الواحد المخصوص

يقبل

يقبل التولد بجملة كيفيات وسنذكر فيما يأتي عدة أمثلة على تنوع طرق التولد للسطوح لغرضين الاول لاجل زيادة تنوير تعريف السطوح والثانى لمعرفة السطوح الكثيرة الاستعمال

بند ١٠٨ (فى السطح المخروطى) السطح المخروطى هو المحل الهندسى لجميع الاوضاع التى يأخذها مستقيم متحرك مثل س ا (شكل ٧٦ لوحه ١٨) مكلف على الدوام بالمرور من نقطة ثابتة س وبالاتكاء دواما على منحن معلوم مثل ا ب ح مستويا كان أو مضاعف الانحناء أى شماليا وبمقتضى هذا التعريف يرى أن المستقيم المتحرك س ا راسم ثابت الهيئة ومتغير الوضع فقط وأن النقطة الثابتة والمنحنى ا ب ح هما الدليلان المعينان للسطح وأيضا من حيث ان الراسم س ا يجب اعتباره غير محدود من جهتى النقطة س التى تسمى برأس المخروط أو مركزه فلابد ان يولد الطيتين س ا ب ح و س ا ب ح المتقابلتين والغير المحدودتين فاذا استعوض المنحنى ا ب ح بدليل اخر حيثما اتفق أو تغير وضع الرأس س تحصلت جملة سطوح متميزة عن بعضها لكنها تابعة لعائلة واحدة وهى العائلة المخروطية

بند ١٠٩ ولكن هذه السطوح يمكن تولدها بجملة طرق أخرى وفى الواقع كذلك لاننا اذا قطعنا المخروط س ا ب ح بجملة مستويات متوازية تحصلت عدة مقاطع متشابهة مثل اَ بَ حَ و اً بً حً و ... الخ بمعنى ان هذه المقاطع تشتمل على نقط مثل وَ و وً و ... الخ بحيث اذا وصل اليها بانصاف الاقطار وَ اَ ومو ازيه وً اً ثم وَ بَ وموازيه وً بً ثم وَ ءَ وموازيه وً ءً و ... وهكذا كان بين انصاف الاقطار هذه نسبة ثابتة وهذه الدعوى التى لا تزال صحيحة مهما كان جنس الدليل ا ب ح يمكن البرهنة عليها بغاية السهولة بواسطة نظرية الخطوط المتناسبة ولاجل زيادة البيان وسهولة التصور نعتبر أن الدليل ا ب ح قطع ناقص مثلا نصف محوره الاكبر هو و ا = $\frac{ا}{٢}$ ونصف محوره الاصغر و ب = $\frac{ب}{٢}$ وحينئذ فالمقاطع الاخر اَ بَ حَ و اً بً حً و ... الخ المفروض انها موازية لهذه القاعدة تكون أيضا قطاعات ناقصة محاورها موازية لمحورى القطع الناقص ا ب ح وبينها النسب الآتية

$$\frac{ا}{٢} : \frac{ب}{٢} :: \frac{اَ}{٢} : \frac{بَ}{٢} :: \frac{اً}{٢} : \frac{بً}{٢} :: \ldots\ldots \text{ الخ}$$

اذا تقرر هذا يقال اذا حرك القطع الناقص ا ب ح بشرط أن مركزه يسير أولا على

المستقيم س و وثانيا يبقى محوراه دائما موازيين لوضعيهما الاصليين وثالثا ان هذين المحورين يصغران معا بمقادير مناسبة للابعاد س و ، س وَ ، س وَّ … الخ فان هذا القطع الناقص المتحرك ينطبق على التوالى على اَ بَ حَ ، اَّ بَّ حَّ … الخ ويكون بناء على ذلك راسما للمخروط متغيرا الهيئة والوضع معا لكن لاجل تحويل منطوق هذه الشروط المختلفة الى شرط ذى منطوق أبسط من منطوقها يكفى أن نتذكر أن المنحنى ذا الدرجة الثانية يصير معينا فى مستويه متى علمت منه خمس نقط وحينئذ فلو رسمنا على سطح المخروط خمسة أضلاع ثابتة مثل س ا ، س ب ، س ح ، س ء ، س هـ لامكننا أن نقول انه يكفى لتولد هذا المخروط أن يتحرك القطع الناقص المتغير ا ب ح بشرط أن يكون دائما مستويه موازيا لنفسه وأن يكون متكئا دائما على هذه الخمسة مستقيمات التى تعتبر اذ ذاك خمسة أدلة

وأخيرا من حيث ان المستويات المتوازية القاطعة للمخروط يمكن أخذها فى أى اتجاه كان بالاختيار وأيضا من حيث انه كان يمكن قطع المخروط بسطوح أخرى غير المستويات كأن يقطع مثلا بكرات متحدة المركز مركزها نقطة و وانصاف اقطارها متغيرة فكل ذلك مما يثبت لنا أنه يوجد جملة خطوط مستوية أو مضاعفة الانحنا يمكن اتخاذها رواسم للسطح المخروطى الواحد

بند ١١٠ (السطح الاسطوانى) السطح الاسطوانى هو المحل الهندسى للاوضاع المتنوعة التى يأخذها مستقيم مثل ا اَ يتحرك وهو متكئ دائما على طول منحن ثابت مثل ا ب ح (شكل ٧٧ او ٨٩) حالة كونه موازيا على الدوام لاتجاه معلوم لكن هذه الطريقة ليست هى الطريقة الوحيدة التى يمكن بها تولد السطح الاسطوانى بل هناك طرق غير متناهية يتولد بها السطح المذكور كما سترى ذلك قريبا وانما هى الطريقة الوحيدة التى يكون فيها راسم السطح مستقيما ولبيان أنواع هذه الطرق الغير المتناهية نقول لو قطعنا السطح الاسطوانى الحادث من تحرك المستقيم ا اَ بعدة مستويات متوازية وموازية لمستوى الدليل ا ب ح لكانت المقاطع الحادثة بالضرورة منحنيات متساوية ومساوية الى الدليل ا ب ح وعليه فيمكن اعتبار السطح ناشئا من تحرك المنحنى ا ب ح بالتوازى لنفسه مع اتكائه دائما على المستقيم ا اَ باحدى نقطه الثابتة (ويقال ان المنحنى يتحرك بالتوازى لنفسه متى بقى فيه وتران حيثما اتفق من ضمن أوتاره موازيين على الدوام لوضعيهما الاصليين) وهذا الشرط يترتب على استيفائه الحصول على أمرين أولهما

تحرك

تحرك مستوى المنحنى بالتوازى لنفسه وثانيهما عدم دوران المنحنى داخل مستويه المتحرك وفى طريقة التولد هذه يقال للمستقيم ا اَ دليل للمنحنى المتحرك ابح الذى يسمى اذ ذاك راسما فاذا تغير بعد ذلك اتجاه المقاطع المتوازية أمكن الحصول على عدد غير متناه من الرواسم المنحنية التى كل منها يصلح لتولد الاسطوانة عينها وبالجملة فيمكن اعتبار السطوح الاسطوانية كحالة خصوصية من السطوح المخروطية أعنى فى حالة ما تبعد رأس المخروط الى ما لانهاية

بند ١١١ مما يجب التنبيه عليه هنا هو انه اذا غير الدليل المنحنى للمخروط أو للاسطوانة بمستقيم آل السطح الحادث الى مستو وعليه فيمكن تعريف المستوى بتعريف مشابه لتعريف الاسطوانة والمخروط بأنه هو السطح الحادث من تحرك مستقيم مكلف أولا بأن يتكئ دائما على مستقيم ثابت وثانيا بأن يكون دائما موازيا بالوضع الابتدائى أو يمر على الدوام بنقطة ثابتة

بند ١١٢ (فى السطح التحركى أو الدورانى) السطح التحركى الذى يعرف أيضا بالدورانى هو كل سطح حدث من دوران منحن ما مثل ح حَ حً حول مستقيم ثابت مثل ده (شكل ٧٨ لوحه ١٨) بحيث ان كل نقطة من هذا المنحنى كنقطة ح مثلا ترسم دائرة مستويها عمودى على المحور ده ونصف قطرها هو البعد الاصغر حو الكائن بين هذه النقطة و بين المحور المذكور

ومما ينبغى ملاحظته هو انه وان كان جميع انصاف الاقطار المختلفة وهى حو و حَوَ و حًوً .... الخ عموديا على المحور ده فانها لا تكون متوازية عندما يكون الراسم ح حَ حً مضاعف الانحناء ولا عندما يكون هذا الراسم منحنيا مستويا ومستويه لا يمر بالمحور ده أعنى لا يشتمل عليه و يقال للدوائر حما و حَمَاَ .... الخ المتنوعة المرسومة بانصاف الاقطار المذكورة موازيات السطح التحركى

بند ١١٣ اذا مر بالمحور ده مستويات حيثما اتفق مثل هوا و ده وم وغيرهما حدثت فى السطح التحركى مقاطع مستوية مثل ا اَ اً و م مَ مً و .... الخ تسمى بالقطاعات الجانبية لهذا السطح التحركى وتلك القطاعات تكون بالضرورة متماثلة فى الهيئة والشكل ومتساوية لان مستويات هذه القطاعات الجانبية قاطعة للموازيات فى انصاف أقطار صانعة بالضرورة بينها زوايا متساوية مثل اوم = اَوَمَ = اًوًمً وعليه اذا دور المستوى هوم بالمقدار الزاوى موا انطبقت فى آن واحد جميع انصاف

الاقطار وم و وَمَ و وَمّ على وا و وَآ ووَآ وبالضرورة يتحد القطعان الجانبيان مع بعضهما ويصيران قطعا جانبيا واحدا وهذا لا يتأتى الا اذا كانا متساويين ومتحدى الهيئة والشكل وما قيل عليهما يقال على غيرهما فيثبت المطلوب حينئذ من أن جميع القطاعات الجانبية لسطح تحركى واحد تكون متساوية ومتماثلة الشكل والهيئة

بند ١١٤ وينتج من ذلك أيضا انه اذا دار القطع الجانبى ا آ آَ حول المحور ده فانه يمر على عموم السطح التحركى واذن فيمكن اعتباره كراسم جديد للسطح المذكور يمكن استعماله بدلا عن المنحنى الاصلى ح حَ حً ولو كان مخالفا له وفى الواقع ان المنحنى ح حَ حً يكون مغايرا للقطع الجانبى اذا لم تكن جميع نقطه موضوعة فى مستو واحد مار بالمحور ده كما يشاهد ذلك فى الشكل الحالى المفروض ان منظوره مرسوم على المستوى

هو ب بَ آ ا أعنى مستوى المحورين ه وً و وً ص ولهذا السبب قد نقطت اجزاء الموازيات وجزء المنحنى ح حَ حً الموجودة خلف ذلك المستوى وبالجملة يمكن دائما تعيين القطع الجانبى لسطح تحركى من بعد معرفة راسمه الحيثما اتفق اذ يكفى لذلك البحث عن نقط تقابل مستوى مثل هو ب بالموازيات المتنوعة المرسومة بنقط الخط ح حَ حً كما سترى مثال ذلك فيما بعد ان شاء الله تعالى

بند ١١٥ السطوح التحركية التى نحن بصددها لها طريقة تولد أخرى يجب معرفتها وذلك انه حيث كان كل مستو عمودى على المحور ده (شكل ٧٨ لوحه ١٨) يلزم ان يقطع السطح التحركى فى دائرة مركزها موجود على المحور المذكور بند ١١٢ ولها نقطة مشتركة بينها وبين المنحنى ح حَ أو بينها وبين القطع الجانبى ب بَ فيمكن حينئذ اعتبار السطح التحركى ناشئا عن الاوضاع المختلفة التى تأخذها دائرة تتحرك وهى عمودية دواما على المحور ده ومركزها يمشى على هذا المحور حالة كون نصف قطرها يتغير بحيث يكون محيط الدائرة متكئا دائما على المنحنى الثابت ح حَ حً ويكون حينئذ هذا المنحنى بصفة دليل للسطح التحركى يمكن استعواضه بالقطع الجانبى ب بَ بً والدائرة المتحركة بصفة راسم لهذا السطح متغير الهيئة والوضع معا

وتعريف السطح التحركى بهذا التعريف له مزية عظيمة وهى جعل جميع السطوح التحركية الممكن وجودها فى العالم من عائلة واحدة بند ١٠٧ حيث يمكن تولدها عموما بنوع واحد من الراسم الا وهو الدائرة التى تتحرك دائما بالتعامد على المحور منقادة فى أثناء حركتها الانحناء القطع الجانبى الذى هو بصفة دليل لحركتها وفقط الذى يختلف

باختلاف

باختلاف السطوح التحركية من جهة أشكالها المختلفة لا من جهة جنسها وعائلتها وأما نوع الراسم فهو ثابت

بند ١١٦ ولذلك انه بحسب اعتبار القطع الجانبي للسطح التحركي مستقيما أو قطعا ناقصا أو قطعا زائدا أو قطعا مكافئا يكون السطح الحادث مخروطيا أو اسطوانيا أو مجسما ناقصيا تحركيا أو مجسما زائديا تحركيا سواء كان ذا طية واحدة أو ذا طيتين أو مجسما مكافئيا تحركيا لكن بشرط أن يجعل محور دوران السطح التحركي منطبقا على أحد محاور المنحنى الذي يتخذ راسما له لانه ان لم يلاحظ ذلك فالسطح الحادث وان كان لم يزل تحركيا لكنه يكون مغايرا للسطوح التي ذكرنا لك أسماءها وفي الواقع لنمثل لك بالدائرة مثلا فنقول من المسلم الذي لا نقض ولا ابرام فيه أن الدائرة اذا دارت حول أحد أقطارها باعتباره محور دوران لما كان السطح التحركي الناشئ عن دورانها سطحا كرويا لكن متى دارت حول مستقيم موجود في مستويها غير مار بمركزها حدث عنها سطح تحركي آخر يعرف بالجسم الكعكي أو الحلقي وهو جسم على شكل الكعكة أو الحلقة سنذكره فيما بعد

بند ١١٧ السطوح التحركية التي ذكرناها في البند السابق وهي الجسم الناقصي والزائدي بنوعيه والمكافئي التي قيدنا كلا منها عقب اسمه بلفظة تحركي تمييزا له عما سنذكره بعد هذا البند ليست الا أحوالا خصوصية من الخمسة سطوح العمومية الآتية وان كانت غير تحركية لكن لزيادة منافعها فيما سيأتي قد أحببنا ذكرها هنا وهي السطوح الخمسة ذوات الدرجة الثانية المتميزة عن بعضها وليس داخلا من عددها السطح المخروطي ولا الاسطواني ولا المستوى التي هي سطوح بسيطة وقد ذكرناها فلا نعود لها ثانيا ونقتصر على ذكر الخمسة سطوح الآتية فقط

بند ١١٨ (في الجسم الناقصي) لنفرض قطعا ناقصا مثل احدهـ (شكل ٧٩ لوحه ١٨) منشأ على نصفي المحورين و ا = ا , و حـ = حـ ومعتبرا أنه مرسوم في المستوى الرأسي المتخذ لبيان صورة السطح الناقصي عليه بالمنظور ويؤخذ من ذلك أن الخطوط النقطية تدل على الاجزاء الموجودة خلف مستوى هذا القطع الناقص من المنحنيات وهذا الاصطلاح هو الذي سنتبعه في بقية هذا الفصل

فاذا أنشأنا قطعا ناقصا آخر مثل اَ بَ دَ في مستوعمودي على و حـ بنصفي محورين هما الاحداثي وَ اَ = اَ للقطع الناقص الاول ومستقيم اختياري الطول مثل وَ بَ = بَ لكنه

عمودى على وَ اَ ثم فرضنا أن المنحنى اَ ىَ ءَ يتحرك ولكن بشرط أن محوريه ينتقلان بالتوازى لنفسيهما مع حفظهما للنسبة الابتدائية الواقعة بينهما وهى $\frac{بَ}{اَ}$ وبشرط أن أحدهما ينطبق بالتوالى على الاوتار ءَ اَ ، ءً أ ، ء ا ، ..... الخ من القطع الناقص الثابت داه كان المحل الهندسى المتولد بهذه الكيفية هو ما يعرف بالجسم الناقصى وعندما يمر مستوى القطع الناقص المتحرك بالمركز و فانه يبلغ نهاية كبره حيث يصير اذ ذاك نصف المحور المتغير اَ عبارة عن الاحداثى الاكبر ما يمكن وهو وا = ا بحيث لو رمزنا بالرمز و ب = ب للطول الذى يأخذه فى ذلك الوقت المحور الثانى بَ لكانت الثلاثة خطوط الآتية وهى

ء ا = ا ، ب ب = ب ، حه = ح

هى ما يسمونها بالاقطار الاصلية أو بمحاور الجسم الناقصى ويجب أن يلاحظ أن هذا السطح يكون مقفولا من جميع الجهات لان محورى القطع الناقص المتحرك يصيران من بعد تجاوزه لنقطتى ح ، ه تخيليين ويمكن تولد هذا السطح عينه بواسطة تحريك قطع ناقص آخر مثل القطع ح ب ه ب المنشى فى مستو عمودى على مستوى القطع الناقص الثابت ا ح ء ه بين محورين أحدهما عبارة عن الوتر ح ه من القطع الثابت وثانيهما وهو ب ب ذو طول اختيارى فى حرك القطع الناقص ح ب ه ب بشروط كالشروط التى تحرك على حسبها المنحنى اَ ىَ ءَ الاول كان السطح الحادث سطحا ناقصيا من جنس السطح الاول ولاجل أن يكون السطح الحادث هو نفس السطح الذى تولد بالطريقة الاولى يؤخذ المحور الثانى وهو ب ب بشرط أن يكون القطع الناقص المتحرك ح ب ه ب متكئا دائما على القطع الناقص ا ب ء ب أى بشرط أن يكون المحور ب ب عبارة عن أحد أوتار القطع الناقص المذكور

بند ٤٤٩ اذا كان القطع الناقص الراسم وهو اَ ىَ ءَ دائرة بمعنى اننا لو كنا اتخذنا المحور وَ ىَ مساويا وَ اَ لصار السطح الحادث سطحا ناقصيا تحركيا كما فى بند ٤١٥ وقطعه الجانبى هو المنحنى الدليل داه ومحوردورانه هو حء ويصير اذ ذاك محوران اثنان من محاور السطح وهما وا ، وب متساويين ويقال لهذا الجسم فى هذه الحالة الجسم الناقصى التحركى المستطيل أما اذا كان القطع الناقص ح ب ء ب الراسم للسطح الناقصى

فى

فى طريقة تولده الثانية هو الذى صار دائرة أى تساوا محوراه ببعضهما فان الجسم يكون تحركيا أيضا لكنه غير الجسم التحركى المتقدم لان محور دورانه يكون فى هذه الحالة اى الاصغر من حه فيكون حينئذ السطح الحادث مبططا لان ارتفاعه اصغر من عرضه ولذا يعرف بالجسم الناقصى التحركى المبطط

فاذا تساوت انصاف المحاور الثلاثة وا , وب , وح ببعضها آل الجسم الناقصى الحادث الى كرة

وينتج من ذلك أولا أن الجسم الناقصى على نوعين الاول وهو ما كانت محاوره الثلاثة مختلفة يسمى بالجسم الناقصى ذى الثلاثة محاور أو الجسم الناقصى فقط والنوع الثانى هو ما كان فيه محوران متساويان من ضمن محاوره الثلاثة وهذا النوع يعرف بالجسم الناقصى التحركى وهو نوعان أيضا جسم ناقصى تحركى مستطيل وهو ما كان كل من محوريه المتساويين أصغر من المحور الثالث المفرد وجسم ناقصى تحركى مبطط وهو ما كان بعكس ذلك

وثانيا أن الكرة لم تكن سوى حالة خصوصية من الجسم الناقصى فعندما تتساوى محاوره الثلاثة ببعضها يستحيل الى كرة

بند ٢١٢ فى الجسم الزائدى ذى الطية (شكل ٨٠ لوحه ١٩) اذا عوض القطع الناقص الذى كان مستعملا فى البندين المتقدمين بصفة دليل بقطع زائد مثل ا أ ا الذى نصف محوره الحقيقى وا $= ا$ ونصف محوره التخيلى وح $= ح$ ثم انشئ قطع ناقص فى مستو عمودى على وح كالقطع الناقص آ ى ىَ مثلا بمحورين أحدهما عبارة عن الوتر آ ىَ للقطع الزائد والثانى اختيارى وحرك على مقتضى قانون الحركة المتقدمة فانه يولد مجسما يعرف بالجسم الزائدى ذى الطية وانما قيد بذى الطية لانه لم يكن مركبا من سوى طية واحدة غير منتهية كالقطع الزائد المستعمل دليلا له وعندما يمر مستوى القطع الناقص المتحرك بالمركز و يبلغ القطع الناقص المذكور نهايته فى الصغر حيث يصير المحور المتغير ى آ اذ ذاك مساويا الى ءا الذى هو أصغر أوتار القطع الزائد وهذا هو السبب الذى أوجب تسمية المنحنى ا ب ى بقطع ناقص الحلق والمستقيمات الثلاثة الآتية وهى

$$اى = ٢ا \ ,\ بى = ٢ب \ ,\ ح‍ه = ٢ح$$

تسمى بالمحاور الثلاثة للجسم الزائدى لكن من حيث ان الاخير منها وهو وحه لا يقابل السطح فيقال له بسبب ذلك المحور التخيلى وأما الكمية الحقيقية ٢ ح فانها ليست الا معاملا لالقدار الجبرى التخيلى الذى ينتجه التحليل عند البحث عن نقط السطح التى يقال بوجودها على المستقيم الغير المحدود وحوَ

بند ١٢١ متى كان المحوران الحقيقيان وا , وب متساويين صار الجسم الحادث كما تقدم فى بند ١١٥ جسما تحركيا يسمى بالجسم الزائدى ذى الطية التحركى اذ يؤول حين ذاك القطع الناقص الراسم الى دائرة وفى هذه الحالة الخصوصية يمكن أيضا تولد السطح بواسطة دوران منحنى القطع الزائد اَ اَ ا حول محوره التخيلى وحوَ

بند ١٢٢ فى الجسم الزائدى ذى الطيتين (شكل ٨١ لوحه ١٩) اذا أنشئ قطع زائد بنصفى المحورين وا = ا , وح = ح كما تقدم لكنه موضوع بحيث يكون وح محوره الحقيقى ثم تحرك القطع الناقص اَ حَ دَ كما تقدم فانه يتولد نوع من الجسمات الزائدية له طيتان غير محدودتين منفصلتان عن بعضهما بمسافة هوائية لم يكن بها نقط من السطح وفى الواقع لان الوتر المتغير اَ دَ الذى يجعل محور القطع الناقص المتحرك يصير تخيليا فيما بين نقطتى ح , حه و يصير المحور الثانى وَبَ بالضرورة تخيليا أيضا لان بينه و بين الاول نسبة محفوظة ثابتة ولداعى صيرورة الراسم كله تخيليا فى بحر تلك المسافة فلا يمكن أن تتولد من تحركه فى اثنائها نقط حقيقية من السطح ومع ذلك فمن حيث انه معلوم ان نصف المحور وَاَ يصير عند المرور من نقطة و مساويا الى وا$\sqrt{-1}$ فلو أريد تعيين المعامل الحقيقى للمحور الآخر الذى هو تخيلى أيضا يلزم ان يؤخذ على مستقيم عمودى على المستوى اوح بعد مثل وب بحيث يكون

$$\frac{وَبَ}{وَاَ} = \frac{وب \cdot \sqrt{-1}}{وا \cdot \sqrt{-1}} = \frac{وب}{وا}$$

وحين ذاك يكون المستقيمان اى = ٢ ا , ب ى = ٢ ب هما اللذان يعبر عنهما بالمحورين التخيليين للجسم الزائدى ذى الطيتين وأما ححه = ٢ ح فهو محوره الحقيقى

بند ١٢٣ لاجل صيرورة هذا الجسم تحركيا يجب أن يكون المحوران التخيليان وا , وب متساويين لان هذا الشرط موجب لان يكون وَاَ = وَبَ وهذه المتساوية ينبنى عليها تحويل القطع الناقص الراسم الى دائرة وفى هذه الحالة يمكن أيضا

تولد

تولد هذا السطح التحركى بتدوير الفرعين ح أ أ َ ، هـ أ ً من القطع الزائد الاصلى حول محوره الحقيقى ح و ط

وينتج مما ذكر أن الجسم الزائدى نوعان ذو طية واحدة وذو طيتين وكلا هذين النوعين على نوعين ذو ثلاثة محاور مختلفة وتحركى فحينئذ توجد أربعة أنواع من المجسمات الزائدية تتميز عن بعضها ولها أسماء مخصوصة وهى الآتية

الجسم الزائدى ذو الطية

الجسم الزائدى ذو الطية التحركى

الجسم الزائدى ذو الطيتين

الجسم الزائدى ذو الطيتين التحركى

بند ١٢٤ (فى الجسم المكافى الناقصى) لنجعل الآن الدليل الثابت قطعا مكافئا مثل ءَ و أ َ (شكل ٨٣ لوحه ١٩) ثم نأخذ قطعا ناقصا مثل أ ت ءَ محوره الاول وَ أ = أ يلزم أن يكون مساويا على الدوام للاحداثى المتغير لهذا القطع المكافى ومحوره الثانى وَ تَ = تِ يكون أول مرة اختياريا ثم يحفظ بعد ذلك النسبة الواقعة بينه وبين المحور الاوّل ونحركه بالتعامد على محور القطع المكافى وهو و س فيولد سطحا مركبا من طية واحدة غير محدودة فى اتجاه المحور و س وهذا السطح هو ما يعرف بالسطح المكافى الناقصى لان جميع المقاطع الممكن رسمها عليه لا تخرج عن ان تكون اما قطاعات مكافئة أو قطاعات ناقصة

بند ١٢٥ وعندما يتساوى محورا القطع الناقص الراسم ببعضهما يصير السطح المتولد تحركيا ويسمى بالسطح المكافى التحركى وبينما يصير تحركيا يمكن تولده أيضا بتدوير القطع المكافى و أ أ َ حول و س

بند ١٢٦ (الجسم المكافى الزائدى) لنفرض الآن ان الدليل الثابت قطع مكافئ أيضا مثل ءَ و أ َ (شكل ٨٣ لوحه ١٩) ونستعوض الراسم الناقصى الذى كان نستعمله لحد الآن بقطع زائد مثل ءهَ ، أ حَ مرسوم فى مستو عمودى على و س بنصفى محورين مثل وَ أ َ ، وَ تَ بحيث تبقى النسبة بينهما على الدوام ثابتة وأولهما الذى هو المحور الحقيقى لهذا القطع الزائد يكون على التوالى مساويا للاحداثيات المتنوعة وَ أ َ ، وً أ ً ... الخ من القطع المكافى الثابت فاذا حرك هذا القطع الزائد بالتوازى لنفسه فانه يولد

فى مبدأ الامر طيتين مفتوحتين أحداهما جهة اليمين والاخرى جهة الشمال ومفصولتين من بعضهما بالفراغ الداخلى للاسطوانة ءَ و أً وممتدتين الى غير نهاية فى الاتجاه وَ س مثل القطع المكافى لكن اذا ارتفع القطع الزائد المتحرك من بعد نقطة وَ نحو نقطة ف صغر محوره الحقيقى وَاَ ثم ينعدم فى نقطة و وعليه فتتصل ببعضهما الطيتان اللتان قلنا انهما كانتا منفصلتين وفى ذاك الوقت بعينه يستحيل القطع الزائد فى هذا الوضع الى مستقيمين غير محدودين لءوك و لوا موجودين بكليهما على السطح وموازيين الى الخطوط التقريبية لجميع القطاعات الزائدة المتقدمة

ومتى ارتفع القطع الزائد الراسم فوق نقطة و بأن وصل الى نقطة كنقطة وً مثلا ظهر ثانيا لكن فى وضع مثل هً ـً عً منعكس بالنسبة الى خطيه التقريبيين وفى الواقع لان المحورين اللذين بيناهما رسميا بالمستقيمين وَاَ و وَبَ يجب بيانهما فى الحقيقه لاجل الضبط بمقاديرهما الآتية

أ = وَاَ و بَ = وَبَ √‾−١

وحينئذ من حيث ان احداثى القطع المكافى فى نقطة وً صار تخيليا وان المحور الاول للقطع الزائد المتحرك يصير تبعا لذلك هكذا أً = وً أً √‾−١ فيجب اذن ان المحور الثانى لهذا القطع لاجل ان يحفظ مع المحور الاول نسبة ثابتة ان يكون مقداره مبينا بالصورة الآتية

بً = أً · بَ/أ = وً أً · وَبَ/وَاَ

وهذه هى كمية حقيقية مبينة فى الشكل بالبعد وً ـً ومن ذلك يظهر ان المحور الحقيقى وً ـً للقطع الزائد الراسم يصير فيما فوق نقطة و متجها فى اتجاه عمودى على المستوى اَ و ءَ وان فرعى هذا المنحنى يولدان أيضا طيتين غير محدودتين احداهما موضوعة امام هذا المستوى والاخرى خلفه لكن باجتماعهما مع الطيتين السابقتين فى المستقيمين لءوك و لوا يتكون من المجموع سطح واحد غير مقطوع ذو انحناآت متضادة الجهة كما يرى ذلك تقريبا فى السطح المقعر من مقر البكرة الذى يلف عليه الحبل وقد

سمى

سمى هـذا السطح بالسطح المكافى الزائدى لانه بالتحليل الجبرى يعلم ان جميع القاطع المستوية الممكن رسمها عليه لاتكون الا قطاعات مكافئة أو قطاعات زائدة ومن ضمنها الحالتان اللتان يكون خط التقاطع فيهما مستقيما منعزلا أو مستقيمين متقاطعين مع بعضهما

ولاجل سهولة تصور (الشكل ٨٣ لوحه ١٩) يجب أن نتذكر انه مرسوم على المستوى الرأسى ءَ و أَ بصفة كون المستوى المذكور كمستوى المنظور وعلى هذا يعلم ان جميع الخطوط النقطية موضوعة خلف هذا المستوى والأولى ان تراجع هيئة هذا السطح فى ارنيكه الذى يعمل بالتجسيم أو بواسطة خيوط مشدودة كما سنبين ذلك ان شاء الله فيما سيأتى لان تصور هذا السطح من الشكل الخطى فيه صعوبة نوعاً

نتيجة يفهم مما تقدم ان السطح المكافى الزائدى لايمكن أن يكون تحركيا لانه علم مما تقدم ان هذا السطح ليس له بالكلية مقاطع مستوية مقفولة وبناء عليه فلا يمكن أن يكون موجودا عليه دوائر مع ان هذا الشرط لازم فى السطوح التحركية

بـ١٢٧ـد الطريقة التى ذكرت آنفا لتولد وتكوين السطح المكافى الزائدى ينشأ عنها فى الحقيقة نوع عدم استمرار فى الرسم حيث انه من فوق نقطة ويصير القطع المكافى الذى كان كدليل للسطح تخيليا ولكن من حيث انه يمكن بسهولة تفسير هذه الصعوبة بواسطة التحليل الجبرى فقد استحسنا اثبات طريقة التولد المذكورة لامور منها انها مشابهة جدا الطرق تولد السطوح المتقدمة وانها محققة جيدا للتسمية التى اعطيت لنوعى السطح المكافى ولكونها تظهر جيدا وجود المستقيمين ول و ونَ الموضوعين على السطح المكافى الزائدى ومع ذلك فهناك أيضا طريقة تولد أخرى مستمرة بالكلية ومشتركة بين نوعى السطح المكافى نذكرها فنقول

اذا رسم على المحور الواحد و س (شكل ٨٢ لوحه ١٩) قطعان مكافئان مثل أَ و ءً و بً و ے بحيث يكونان متحدين فى الرأس و ومرسومين فى مستويين متعامدين وان يكون تقعيراهما متجهين فى جهة واحدة والبعد الثابت لكل منهما اختياريا (البعد الثابت للقطع المكافى هو البعد الكائن بين بورته ودليله) ثم حرك أحد هذين القطعين المكافئين بالتوازى لنفسه بدون حصول اختلال فى شكله لكن بشرط ان رأسه تتحرك دائما على القطع المكافى الثانى الثابت تحصل بالضرورة السطح المكافى الناقصى الذى كوناه فى بـ١٢٤ـد بطريقة أخرى

ولو أخذنا أيضا قطعين مكافئين مثل آ وَّ د بً و ءً (شكل ٨٣ لوحه ١٩) مرسومين بنفس الشروط المتقدمة وفقط تقعيراهما موجهان فى جهتين متضادتين ثم حرك أيضا القطع المكافى آ و ءً ذو الشكل الثابت بالتوازى لنفسه وبشرط أن يمشى دائما رأسه على القطع المكافى الآخر الثابت لتحصل لنا السطح المكافى الزائدى الذى تولد فى بند ١٢٦ بكيفية أخرى

(الفصل الثالث)

(فى الكلام العام على المستويات المماسة للسطوح وكيفية بيانها بالرسم)

بند ١٢٨ يقال ان المستوى مماس للسطح فى نقطة معينة متى اشتمل على المستقيمات المماسة لجميع المنحنيات التى يمكن رسمها على هذا السطح من النقطة المعينة المذكورة ولاجل أن نحكم بصحة هذا التعريف يلزمنا ابتدأ أن نثبت وجود مستو بهذه الصفة لكل نقطة من نقط السطح المفروض وانه يشتمل على جميع مماسات المنحنيات المرسومة من تلك النقطة على السطح لانه ربما توهم الانسان فى مبدأ الامر أن المماسات لجميع المنحنيات المارة بنقطة ما من السطح توجد على سطح مخروطى لا على مستو واحد كما أن ذلك يحصل فى الحقيقة أحيانا فى بعض نقط غريبة ولذا يكفى ان نبرهن على ان كل ثلاثة مماسات لثلاثة منحنيات مرسومة على سطح ما من نقطة معينة عليه تكون موجودة فى مستو واحد

ولنفرض مثلا أن ح م ح (شكل ٨٤ لوحه ١٩) هو عبارة عن الخط الراسم للسطح المعلوم فى وضعه عندما يمر بنقطة م المعلومة وأن خط ء م هو منحن مرسوم على السطح ومعد لاجل أن يتكى عليه دائما الراسم عندما يتحرك لتولد السطح المعلوم واخيرا ليكن م ص منحنيا ثالثا اتفق مرسوما بالاختيار على السطح بعينه فاذا نقلنا الراسم فى وضع آخر مثل حَ مَ حَ فانه لا يتأخر عن ان يقابل المنحنى م ص فى نقطة ما مثل نقطة طَ ويشترط أن تكون نقطة مَ مأخوذة على الدليل ء م بالقرب من نقطة م على قدر ما يمكن وحينئذ اذا وصلت الثلاث نقط م و مَ و طَ بمستقيمات غير محدودة كانت هذه الثلاثة مستقيمات الموصولة قواطعا بالنسبة للمنحنيات م ء و م ص و حَ حَ وتكون الثلاثة موجودة بالضرورة فى مستو واحد ثم نحرك الراسم حَ حَ على خط م ء مع تقريبه من وضعه الابتدائى ح ح لكن

بشرط

بشرط المحافظة دائما على القانون الذى على مقتضاه يتغير كل من وضع هذا المنحنى المتحرك وهيئته لاجل أن يرسم السطح المعلوم ثم بعد ذلك نتصور أن مستوى الثلاثة قواطع يدور حول نقطة م بحيث انه يمر فى آن واحد مع الراسم بالنقط مَ و طَ ثم مً د طً و . . . . الخ التى هى نقط تلاقى هذا الراسم بالمنحنيين مء و مص على التوالى و عليه فهذا المستوى المتحرك يكون على الدوام شاملا للثلاثة قواطع المتغيرة ومن المعلوم أنه متى رجع الراسم الى الوضع حم ح تتحد نقطة مَ المتحركة على المنحنى مء مع نقطة م وأيضا من الضرورى أن نقطة طَ الكائنة على المنحنى مص تأتى هى الاخرى وتجتمع على النقطة م وبالتبعية لذلك ينبغى أن تتحد أيضا نقطتا طَ و مَ الكائنتان على المنحنى حَ حَ المتحرك ببعضهما وتصيران نقطة واحدة

وبناء عليه يرى أن الثلاثة قواطع المتحركة قد صارت مماسة على التوالى الى المنحنيات مء و مص و مح فاذا تذكرنا أن هذه الثلاثة قواطع كانت فى كل وضع من اوضاع الراسم موجودة فى مستو واحد أمكنا حينئذ أن نستنتج من ذلك أنها متى آلت الى الثلاثة مماسات مس ومسَ ومسً فلا تزال توجد فى مستو واحد وهو نهاية الاوضاع التى كان يأخذها على التوالى مستوى الثلاثة قواطع المتحرك وأيضا من حيث ان المنحنى مص قد أخذ بالاختيار لا فى وضع مخصوص على السطح فينتج حينئذ من ذلك أن المستوى المار بالماسين للمنحنيين م ح و م ء يشتمل على المماس لاى منحن آخر مار من نقطة م وعليه فيكون المستوى س م سً مماسا للسطح وذلك بناء على التعريف الذى قررناه فى أول هذا البند

اعلم ان هذه النظرية مهمة جدا لانها تسهل الاعتبارات المختصرة النافعة جدا الداخلة فى طريقة النهايات كما سترى ذلك فى محله ومما يدل على أهمية هذه النظرية الاحتياج لها كثيرا عند البرهنة على بعض الاشياء فمثلا لولا ثبت ان جميع المماسات للمنحنيات المرسومة على سطح واحد من نقطة معلومة توجد فى مستو واحد لما كان يسوغ لنا اعتبار ان اى سطح منحن يتركب من جملة عناصر صغيرة مستوية وذلك لان تلك العناصر السطحية الصغيرة مركبة من الاجزاء الصغيرة الخطية المشتركة بين منحنيات السطح ومماساتها

بند ١٢٩ وحينما يكون للسطح المعلوم طيتان أو جملة طيات متقاطعة كما يحصل ذلك

فى السطح المخروطى مثلا عندما تفرض قاعدته منحنيا معقودا لانه يظهر لنا فى مبدأ الامر أن النقط الموجودة على خط تقاطع الطيتين لا تنطبق عليها خاصية المستوى المماس لاى سطح فنظن أنها مستثناة من القاعدة العمومية بمعنى أن المستوى المماس للسطح فى احدى هذه النقط لا يشتمل على جميع المماسات للمنحنيات الممكن رسمها على السطح من النقطة المذكورة ولكن اذا تأملنا فى هيئة السطح المخروطى الذى يكون بهذه الصورة نجد انه مركب من طيتين متميزتين عن بعضهما بحيث يلزم التفريق بين المنحنيات الممكن رسمها من النقطة المفروضة على سطح المخروط لان بعض هذه المنحنيات يكون منسوبا لاحدى الطيتين أى موجودا على سطحها والبعض الآخر على الطية الثانية وعليه فتكون المماسات لها متميزة بعضها يوجد فى مستو واحد مماس لاحدى الطيتين والبعض الآخر يوجد فى مستو آخر مماس للطية الثانية فى نفس النقطة الواحدة وبهذه الصورة متى اعتبرنا طيتى السطح كسطحين قائمين بنفسهما ومتقاطعين مع بعضهما فى الراسم المتكئ على نقطة انعقاد القاعدة رأينا ان خاصية المستوى المماس للسطح هى خاصية عمومية ليس فيها استثناآت

بند ١٣٠ ومع ذلك فقد توجد احيانا بعض استثناآت حقيقية فى خاصية المستوى المماس لكن ذلك لا يحصل الا نادرا فى بعض نقط مخصوصة من السطح تسمى من أجل ذلك بالنقط الغريبة وهى النقط التى يكون الخط الراسم للسطح أو دليله قد آل فيها الى نقطة واحدة فلا يكون له بالضرورة مماس بالكلية مثلا نقطة رأس السطح المخروطى هى نقطة غريبة بالنسبة لجميع نقط السطح المذكور اذ لا يوجد للمخروط مستو مماس فيها لان جميع الخطوط الممكن رسمها على السطح من هذه النقطة تؤل الى الرواسم المستقيمة من المخروط ولا شك ان كل راسم منها يعتبر كمماس لنفسه فاذا نظرنا الى رواسم المخروط باعتبارها كمماسات للخطوط المرسومة على السطح من نقطة الرأس نجد أن كل راسمين منهما يوجدان فى مستو مخصوص بمعنى ان هذه المماسات المختلفة لا توجد كلها فى مستو واحد طبقا للخاصية المتقدمة فى بند ١٢٨ واذن تكون رأس المخروط نقطة غريبة ليس له فيها مستو مماس مطلقا ولو نظرنا الى طريقة تولد السطح المخروطى بواسطة تحرك منحن موازٍ لقاعدته كما فى بند ١٠٩ رأينا ان هذا الراسم المنحنى يضيق شيأ فشيأ كلما تباعد عن القاعدة وقرب من الرأس حتى اذا وصل الى الرأس يصير نقطة واحدة وحينئذ فلا يكون له فى هذا الوضع الاخير مماس حقيقى ومن هنا يتضح لنا

السبب

السبب فى عدم تطبيق خاصية بـ ١٢٨ د على نقطة رأس المخروط وكذا اذا نظرنا لكون المخروط متولدا من تحرك راسم مستقيم بالاتكاء على قاعدته وبشرط ان يمر دائما بنقطة ثابتة وهى رأس المخروط كما فى بـ ١٠٨ د نجد انه لداعى صيرورة الدليل الثانى نقطة لا يكون له مماس بالكلية ولهذا السبب قد امتنع تطبيق خاصية المستوى المماس العمومية على نقطة رأس المخروط فهى بهذه الاسباب نقطة غريبة بالنسبة لسطح المخروط وقد يوجد مثل هذه الحالة فى بعض السطوح التحركية التى يكون قطعها الجانبى متقاطعا مع محور الدوران على زاوية حادة أو منفرجة فان نقط هذا السطح التى تكون موجودة على محور الدوران لا يوجد لهذا السطح فيها مستويات مماسة لانه لما كانت جميع المماسات للقطاعات الجانبية المختلفة لهذا السطح فى احدى هذه النقط غير موجودة فى مستو واحد بل توجد على سطح مخروطى قائم صارت بسبب ذلك نقطا غريبة بالنسبة للسطح التحركى التى هى منه ومثال ذلك السطح التحركى الحادث من دوران قوس دائرة حول وتره فان نقطتى السطح الموجودتين على محور الدوران تكونان غريبتين

بـ ١٣١ د ومن المهم أن يلاحظ ان تعريف المستوى المماس لاى سطح بانه هو المستوى الشامل لكافة مماسات الخطوط الموجودة على السطح والمارة من نقطة التماس كما فى بـ ١٢٨ د لا يفيد ولا يقضى بان لا يكون بين المستوى المماس والسطح الممسوس نقط مشتركة سوى نقطة التماس نعم ان ذلك يحصل فى السطوح المحدبة تحديبا كليا لكن كثيرا ما يكون المستوى المماس للسطح ملاقيا له فى نقط متعددة بل قاطعا له فى منحن مار بنقطة التماس كما سترى مثال ذلك فى المستوى المماس لسطح الجسم الكعكى بـ ١٧٨ د وهذه الحالة لا تمنع أبدا المستوى الذى بهذه الصورة من أن يشتمل على كافة مماسات الخطوط المرسومة على السطح من نقطة التماس المعينة وعليه فهو لا شك مماس تماسا حقيقيا فى هذه النقطة ولو كان قاطعا للسطح فى جميع النقط المغايرة لها

بـ ١٣٢ د وهناك نوع من السطوح يكون المستوى المماس له فى نقطة معلومة من نفسه وطبيعته مماسا لنفس السطح المذكور بطول مستقيم مار بهذه النقطة فمثلا اذا نظرنا لحالة الاسطوانة ا ب ح (شكل ٨٥ لوحه ١٩) التى قاعدتها حيثما اتفق نجد انه لو مر بالراسم ا ب وبالمستقيم ب س المماس للقاعدة مستو فان ذلك المستوى لا يكون مشتملا فقط على جميع المماسات للخطوط المرسومة على الاسطوانة من النقطة ب

كما ثبت ذلك فى بـ ١٢٨ د بل يكون مشتملا أيضا على جميع المماسات لعموم المنحنيات المرسومة على الاسطوانة من جميع نقط الراسم اب المتعددة ولاجل البرهنة على صحة ذلك يكفى أن نبرهن على ان المستوى ابسه يشتمل على المماس مف للمنحنى الحيثما اتفق مصه الموجود على سطح الاسطوانة ولذلك نقول اذا امررنا مستويا مثل ابر بالراسم اب و بنقطة ى القريبة من نقطة ب قطع بالضرورة هذا المستوى الاسطوانة فى مستقيم مثل ىهـ موازالى اب و يقطع المنحنى مصه فى نقطة مثل ح موضوعة على المستقيم ىهـ بحيث ان هذا المستوى يشتمل على القاطعين بىر و مح ى فاذا دور المستوى المذكور حول اب بشرط ان تقرب بالدوران نقطة ى من نقطة ب وجدنا ان نقطتى التقاطع ى و ح تتغيران على المنحنيين لكنهما موجودتان دائما على مستقيم يتحرك وهو دائما موازالى اب وحينئذ فى اتحدت احدى هاتين النقطتين ولتكن ى مثلا مع نقطة ب ففى الوقت بعينه تتحد نقطة ح الاخرى مع نقطة م بمعنى أنه عندما يأخذ المستوى المتحرك الوضع ابس فالقاطع المتغير مح ى الموجود دائما فى هذا المستوى يؤول الى المماس مف وعليه فيثبت المطلوب من ان هذا المستقيم موجود فى المستوى ابس

وينتج من ذلك انه عندما يقال ان المستوى مماس للاسطوانة فى نقطة ما من سطحها ينبغى أن يفهم بالضرورة ان هذا المستوى مماس للاسطوانة بطول الراسم المستقيم المار بنقطة التماس المعلومة

بـ ١٣٣ د النظرية المتقدمة فى البند السابق لها أيضا نتيجة مهمة جدا يحتاج اليها كثيرا فيما يأتى

وهى انه اذا أسقط منحن مثل مصه (شكل ٨٥ لوحه ١٩) ومماسه مف على مستو كان مسقط المماس مماسا لمسقط المنحنى والعكس بالعكس لانه لاجل ايجاد مسقط المنحنى مصه يلزم بمقتضى بـ ٨ د أن تتصور اسطوانة مارة بهذا المنحنى وعمودية على المستوى المعلوم فتقطعه فى منحن مثل بح يكون هو مسقط المنحنى مصه وأيضا لاجل اسقاط المستقيم مف ينبغى ان يمرر به مستو عمودى على مستوى المسقط ولا يخفى ان المستوى الذى بهذه الصورة هو المستوى ف م ب ويكون هذا المستوى مماسا بالضرورة للاسطوانة فى نقطة م يلزم ان يكون بمقتضى بـ ١٣٢ د مماسا لها فى جميع نقط الراسم مب وفى نقطة ب بالجملة وبناء عليه فيكون المستوى المذكور

شاملا

شاملا للمستقيم ب س المماس للقاعدة ب ح وحينئذ فهـذا المماس يكون عبارة عن خط تقاطع المستوى المسقط بمستوى القاعدة وعليـه فهو مسـقط المماس م ف على مستوى القاعدة المذكور وبذلك يثبت المطلوب

وبمثل ذلك يمكن اثبات صحة هذه النظرية في الحالة التي تكون فيها المساقط مائلة أعني عندما تكون الخطوط المسقطة مائلة على مستوى المسقط ومتوازية

بـ ١٣٤ـد المسـتوى المماس للسطح المخروطي في نقطة مّا من سطحه يمسـه بطول الراسم المستقيم المـار بهذه النقطة وبرهان ذلك كبرهان خاصية المستوى المماس للاسطوانة في نقطة مّا انما يلاحظ أن نقطتي ى و ح اللتين كانتا تنتقلان معا على مسـتقيم متغير يكون موازيا على الدوام للراسم المـار بنقطة التماس تتحركان هنا معا على مستقيم متغير أيضا متقاطع مع اب في رأس المخروط

وأخيرا يلزم التنبيه على ان هـذه الخاصية ليست قاصرة على الاسطوانة والمخروط فقط بل سنرى فيمـا سيأتي انها توجد في جميـع أفراد جنس من السطوح تسمى بالسطوح القابلة للانبساط وليس كل من الاسـطوانة والمخروط الا حالة خصوصـيـة من هـذا الجنس العمومي وسنسوق الـكلام على ذلك في محله

بـ ١٣٥ـد ومع ذلك فانه لا يجب أن نتصور أن خاصية تمـاس المستوى المماس للسطوح المذكورة بطول الراسم المـار بنقطة التمـاس ناشئة عن كون تلك السطوح تقبل التولد بواسطة الراسم المستقيم فان تصور ذلك من الخطأ الاكبر وذلك لان هناك سطوحا كثيرة تقبل التولد بالراسم المستقيم لكن المسـتوى المماس لها في أي نقطة من سطحها لا يمسها الا في نقطة التمـاس المعينة لا غير (راجـع ما في بـ ١٨٢ـد و بـ ١٩٤ـد) ومع أنه مشتمل على راسم مستقيم من رواسم السطح لا تتوفر شروط تماس المستوى بالسطح الا في نقطة واحدة من هـذا الراسم والسطوح التي بهذه الـكيفية هي التي يسمونها بالسطوح الشمـالية

بـ ١٣٦ـد اذا اختصرنا جميـع ما قيل في حق المستويات المماسة أمكننا أن نستنتج منه قاعدة عمومية لتعيين المستوى المماس لاى سطح في أي نقطة تفرض عليه وهي أن يبحث عن المماسين لمنحنيين مرسومين على السطح من النقطة المفروضة ويمرر بهما مسـتو فيكون مماسا للسطح المعلوم في تلك النقطة انما تسهيلا للعمل قد جرت العادة بأن نأخذ المنحنيين اللازمين لتعيين المستوى المماس في وضعين بسـيطين جدا وسهلين حتى يكون العمـل عليهما سهلا ومضبوطا عنـدما اذا أخذا مجانا وسنذكر عن قريب عدة أمثلة متنوعة على

كيفية اجراء هذه العملية

وحيثما يمكن أن يمر بالنقطة المعلومة مستقيم موجود بأكمله على السطح المعلوم يكون هذا المستقيم عبارة عن شيئين في آن واحد وهما كونه خطا مرسوما على السطح من نقطة التماس وكونه عبارة عن المماس لنفسه وبناء عليه فيكون هذا المستقيم موجودا في المستوى المماس المطلوب ويمكنا استعماله لتعيين المستوى المذكور باشتراكه مع المماس لخط آخر مرسوم على السطح من نقطة التماس لكن لازلت أحذر من أن يتصور ان ذلك داع لان يكون هذا المستوى مماسا للسطح بطول ذلك المستقيم

بـ ١٣٧ د اذا أقيم من نقطة تماس أي مستو مماس لسطح ما مستقيم عمودي على هذا المستوى المماس سمى هذا المستقيم بالعمودي على السطح المعلوم في النقطة المفروضة أو برأسي السطح في النقطة المذكورة والتسمية الاولى أضبط من الثانية لان المستقيم العمودي على سطح لا يكون دائما رأسيا أعني عموديا على المستوى الافقي بل ان اتجاهه يتغير بتغير وضع المستوى المماس فالاولى حينئذ بحسب ما أرى أن يصرف النظر عن هذا الاسم أي رأسي السطح حيث انه لا يدل على مسماه دلالة مضبوطة كما يدل عليه اسم العمودي على السطح

ويفهم من هذا التعريف أنه يكفي لتعيين عمودي السطح في أي نقطة البحث عن المستوى المماس للسطح في هذه النقطة ثم يقام منها مستقيم عمودي عليه بأن ينزل من مسقطي نقطة التماس مستقيمان عموديان على أثري المستوى المماس وذلك تطبيقا لما ذكر في النتيجة التي تقررت في بـ ٥٣ د

وينتج من ذلك أن العمودي على سطح الكرة من نقطة مفروضة عليها هو نصف قطرها المار بتلك النقطة وامتداده لاننا اذا رسمنا من النقطة المفروضة على سطح الكرة قوسين من دائرتين عظيمتين ورسمنا المماسين من هذه النقطة ثم وصلنا نصف قطر الكرة المار بها رأينا أن نصف القطر المذكور عمودي على كل من المماسين لقوسي الدائرتين العظيمتين واذن فيكون عموديا على مستويهما الذي هو المستوى المماس للكرة في النقطة المعتبرة وعليه فيكون نصف القطر المذكور بمقتضى ما تقرر في أول هذا البند هو العمودي على سطح الكرة في النقطة التي فرضت عليه

بـ ١٣٨ د (المحيط الظاهري لجسم) من المعلوم أنه اذا وضع الانسان أمام عينه جسما ما ونظر اليه فانه لا يمكنه مشاهدة جميع سطح هذا الجسم بل يرى منه جزأ محدودا فقط وهذا

الجزء

الجزء المشاهد تتغير سعته بالنسبة لبعد عين الناظر عن الجسم المنظور بحيث كلما قربت العين من الجسم قل الجزء المشاهد وكبر بالضرورة الجزء الغير المشاهد وكلما بعدت عنه كان الامر بالعكس فالخط المحدد لسعة الجزء المشاهد الفاصل بينه وبين الجزء الغير المشاهد هو الذى اطلقوا عليه اسم المحيط الظاهرى للجسم بالنسبة لنقطة البصر المعينة ولبيان ذلك نفرض ان نقطة و (شكل ٨٦ لوحه ٢٠) هى الوضع الذى تشغله عين الناظر ونتصور مرور جميع المستويات الممكن رسمها من نقطة و مماسة للسطح المعلوم س فهذه المستويات تمس السطح فى نقط مثل ا ، ب ، حـ ، ... الخ يتكون عنها منحن فيكون هو المنحنى الذى تمر عليه جميع الاشعة البصرية وا ، وب ، وحـ ، ... الخ الخارجة من عين الناظر مماسة للسطح وعليه فيكون الخط ا ب حـ هو الحد الذى ينتهى اليه الجزء الذى يتيسر للناظر الواضع عينه فى نقطة و مشاهدته من سطح الجسم المعلوم وهو ما يسمى بالمحيط الظاهرى للسطح س بالنسبة لنقطة البصر و وهذا المحيط الظاهرى يتغير هيئة ووضعا اذا انتقلت نقطة البصر من موضعها فمثلا اذا انتقلت هذه النقطة الى نقطة وَ صار المحيط الظاهرى عبارة عن المنحنى اَ بَ حَ وهلم جرا وبناء على ذلك ينبغى دائما تحديد نقطة النظر المنسوب لها المحيط الظاهرى لجسم ما عند ذكر هذا المحيط الظاهرى حيث علم انه متغير بحسبها

ولما كان المحيط الظاهرى للاجسام متغيرا بتغير نقطة البصر كان من اللزوم الاتفاق على وضع مخصوص لنقطة البصر وتعين بحسبه المحيطات الظاهرية للاجسام التى يرام رسمها بواسطة طرق الهندسة الوصفية أعنى بطريقة الاسقاط على مستويين متعامدين أحدهما أفقى والآخر رأسى ولذا قد اصطلح علماء هذا الفن على ان لا يعتبر فى تبيين أى جسم بالرسم الوصفى من محيطاته الظاهرية سوى محيطه الظاهرى المأخوذ بالنسبة لنقطة بصر موضوعة على بعد لانهائى بالنسبة للجسم المذكور كما أشرنا الى ذلك فى بند ٢٥ بمعنى انه عند تعيين المسقط الافقى للجسم س يعتبر الرسم أن عينه التى ينظر بها الى هذا الجسم موضوعة على بعد لانهائى فوق الخط الرأسى المار باحدى نقط هذا الجسم أيا ما كانت تلك النقطة وعلى ذلك تصير جميع المستويات المماسة للسطح س التى تتعين بها نقط المنحنى ا ب حـ رأسية فيمكن تعيينها بسهولة عندما اذا كانت حيثما اتفق بطرق بسيطة كما ستعرف ذلك قريبا فيما سيأتى

وأما المحيط الظاهرى للجسم حينما يراد اسقاطه على المستوى الرأسى فتعتبر فيه عين

الرسم موضوعة امام المستوى الرأسي على بعد لانهائي منه فوق مستقيم مار باحدى نقط ذلك الجسم وعمودي على المستوى الرأسي للمسقط

بـ ١٣٩ د ينتج مما ذكر في البند السابق أن الجسم الذي يرام اسقاطه على مستويي المسقط الاعتياديين يلزم ان يراعى فيه محيطان ظاهريان اثنان وهما محيطه الظاهري بالنسبة للمستوى الافقي الذي لاجل تعيينه يبحث عن نقط تماس هذا الجسم بجميع المستويات الرأسية الممكن رسمها مماسة له ومحيطه الظاهري بالنسبة للمستوى الرأسي وهو الخط الجامع لنقط تماسه بجميع المستويات المماسة له التي تكون عمودية على المستوى الرأسي

ومن هنا يعلم أن المحيط الظاهري لاي جسم بالنسبة للمستوى الافقي هو غير محيطه الظاهري على المستوى الرأسي وهذا أمر بديهي تمكن البرهنة عليه بكيفية مستقربة وهي ان يقال ان نقطة البصر في الحالة الاولى غيرها في الحالة الثانية

بـ ١٤٠ د قد ذكرنا في بـ ٢٣ د وبـ ٢٤ د بعض القواعد اللازم اتباعها في عمل التنقيطات التي يجب أجراؤها في الرسم على الخطوط الاصلية وقلنا في بـ ٢٤ د انه لا يمكن تتميم تلك القواعد الا من بعد دراسة السطوح المنحنية والآن قد آن أوان تتميم تلك القواعد فنقول قد علم من تعريف المحيط الظاهري للجسم بالنسبة للمستوى الافقي أن جميع الخطوط من أي جنس كانت الموجودة على سطح الجسم فوق هذا المحيط الظاهري هي التي تكون مشاهدة بالنسبة للرسيم المعتبر وجوده على بعد لانهائي فوق المستوى الافقي الذي يسقط الجسم عليه وان جميع ما كان تحت المحيط الظاهري المذكور من الخطوط المرسومة على السطح المذكورة تكون غير مشاهدة لذلك الرسيم وأيضا علم من تعريف المحيط الظاهري للجسم بالنسبة للمستوى الرأسي ان الخطوط التي تكون امام هذا المحيط الظاهري هي التي تكون مشاهدة بالنسبة للرسيم الذي يسقط الجسم على المستوى الرأسي وان التي خلفه هي المخبئة عليه بالنسبة للرسيم المذكور اذا تقرر هذا فطبقا للاصطلاحات التي اتفقنا عليها في بـ ٢٣ د نقول ان الخطوط الاصلية التي تكون مرسومة على سطح جسم ما ينبغي أن تراعى في رسم مساقطها الشروط الآتية فاولا الخطوط التي تكون فوق المحيط الظاهري للجسم بالنسبة للمستوى الافقي ترسم مساقطها الافقية خطوطا كاملة والتي تحته ترسم مساقطها الافقية نقطية

وثانيا عند رسم المسقط الرأسي لتلك الخطوط ينظر لوضعها الفراغي بالنسبة للمحيط

الظاهري

الظاهري للجسم على المستوى الرأسي للسقط فما كان امامه يرسم مسقطه الرأسي كاملا وما كان خلفه يرسم مسقطه نقطيا

انما ينبغي ان لا ينسى انه قد توجد خطوط من ضمن الخطوط التي على سطح الجسم يكون الواحد منها مشاهدا في أحد المسقطين ومخفيا في المسقط الآخر لان نقطة البصر ليست واحدة في الحالتين بحيث يجب الاعتناء جدا في تمييز ما يجب تنقيطه أو رسمه بالكامل من الخطوط الاصلية في كل مسقط من المسقطين على حدته وأما الخطوط الغير اصلية أي المساعدة فانه لا ينبغي مراعاة التمييزات المتقدمة فيها بل يراعى فيها ما قيل ضمن بند ٢٣ لا غير

بند ١٤١ وفي حالة ما يوجد في أحد الرسومات الوصفية مستوى ما غير محدود سواء كان من المعالم أو من الاشياء التي يبحث عنها فلا ينبغي أن يعتبر له وجود حقيقي في الفراغ بل الواجب أن يفرض أن الموجود من المستوى هو أثراه فقط ان كان من المعالم وان كان من الاشياء التي يبحث عنها فيعتبر أن الذي يبحث عنه من المستوى هما أثراه فقط لانه ان لم يعتبر المستوى كذلك وفرضنا له وجودا حقيقيا ترتب على ذلك انه يغطي معظم أو كل الاشياء الاخرى الموجودة تحته في شكل واحد ولا يخفى ما في ذلك من الضرر العظيم اذ لا يتيسر حينئذ تمييز الاشياء التي تكون فوق أو أمام المحيطين الظاهر بين الجسم من الاجسام المرسومة من التي تكون تحت أو خلف هذين المحيطين وتضيع حينئذ الغاية المقصودة بالذات من الرسم الوصفي فينبغي حينئذ من الآن فصاعدا اعتبار هذا الشرط في جميع الاحوال ولو لم ننبه فيها على لزوم اعتباره أما اذا كان المستوى محدودا كوجه منشور أو هرم مثلا فلا بد من اعتبار وجوده في الفراغ وجودا حقيقيا وملاحظة ما يترتب على هذا الوجود من التنقيطات اللازمة

بند ١٤٢ قد ذكرنا في بند ١٣ أن النقط والخطوط تبين بمسقطها على مستويين ثابتين هما مستويا المسقط وأشرنا في البند المذكور الى ان السطوح لا يمكن بيانها على هذا المنوال أعني بالبحث عن مساقط جميع النقط والخطوط التي توجد عليها وقلنا ان هناك اعتبارات يجب اتباعها في بيان السطوح بالرسم الوصفي والآن نقول حيث ان النقطة الواحدة من سطح اي جسم يمكن ان يمر بها عدة خطوط مختلفة الاتجاهات فاذا تبعنا حينئذ الطريقة المبينة في بند ١٣ لاجل بيان سطح الجسم المذكور كانت النتيجة أننا نشحن مستويي المسقط بالنقط والخطوط التي من كثرتها وارتباكها لا يمكن المرئي

على الارتباطات والعلاقات التى بينها خصوصا وانه لا يستفاد ولا يفهم من مجموعها عند النظر اليها هيئة السطح المعلوم ولا انحناؤه كثيرا كان أو قليلا ولا عدد طياته ان كان له طيات متعددة فلهذه الاسباب الجأت الحالة لاتباع الاعتبارات الآتية فى بيان السطوح على العموم

أولا حيث علم من التعريف المقرر فى بند ١٠٧ أن السطح على العموم حادث من تحرك خط معلوم فيكفى حينئذ لاجل بيانه بيانا واضحا ان يعين على مستوبى المسقط جملة من أوضاع راسمه بحيث يكون عددها وتقاربها كافيين لان يظهر للعين استمرار سطح الجسم المعلوم وانحناءه وامتداد طياته

وثانيا حيث انه قد يتأتى أن يكون للسطح الواحد جملة أنواع مختلفة من الرواسم فينبغى أن ينتخب من تلك الانواع لبيان السطح أكثرها لياقة وصلاحية بالنسبة لبساطته أو انتظامه لبيان صورة السطح المذكور وفى بعض الاحيان لزيادة ايضاح صورته لا يكتفى ببيان رواسم نوع واحد بل يرسم نوعان من الرواسم فمثلا فى السطوح التحركية ترسم عدة قطاعات جانبية وعدة موازيات وهذه هى الطريقة التى اتبعناها فى الفصل السابق لاجل بيان السطوح التى رسمناها رسما نظريا

وثالثا من النافع جدا أن يبين أثرا السطح المعلوم على مستوبى المسقط أعنى خطى تقاطعه بهما وتبين أيضا محيطاته من جهة الداخل أو من جهة الخارج ان كان له محيطات بهذه الصورة لانه متى علمت مساقط محيطاته علم بالتحقيق أنه لا توجد نقط على السطح المعلوم الا وتكون مساقطها منحصرة فيما بين مساقط تلك المحيطات الداخلية أو الخارجية وتلك المحيطات ليست شيأ آخر سوى المحيطات الظاهرية للسطح المعلوم على مستوبى المسقط التى شرحناها تفصيلا فى بند ١٣٨ و بند ١٣٩ فلتراجع هناك

ومع كل ذلك يجب أن يلاحظ أنه متى كانت هيئة السطح المراد بيانه معلومة ومعهودة لنا من قبل فلا ينبغى أن ترسم جميع أنواع الخطوط المتقدمة آنفا بل يمكن أن يقتصر فى بيان ذلك السطح على رسم بعض تلك الخطوط أعنى المهم منها و يصرف النظر عن الباقى وذلك لاجل جعل الرسم بسيطا وسهل الفهم على قدر الامكان

(الفصل الرابع)

(فى المستويات المماسة للسطوح الاسطوانيـة والمخروطية)
(وفى تتمة حل الزاوية المجسمة الثلاثية)

بـ١٤٢د المعـلوم نقطة على سطح اسطوانة حيثمـا اتفق والمطلوب مد مستو ممـاس لهذه الاسطوانة من النقطة المذكورة

فمن الضرورى قبـل رسم هذا المسـتوى المماس يلزم أولا ان تبين الاسطوانة المعلومة بالرسم على مستويى المسقط وبعد ذلك نبحث عن طريقة حل المسـئلة المفروضة ومن المعلوم ان الاسطوانة لا تعلم الا اذا علم دليلها واتجاه رواسمها فليكن دليل هذه الاسطوانة هو منحنى اـحـع (شكل ٨٧ لوحه ٢٠) مثلا المفروض أنه موجود فى المستوى الافقى للمسـقط وقد اعتبر ذلك المنحنى فى شكلنا هـذا محيط دائرة لـكن الطريقة التى سنجريها للحصول على المستوى المماس من بعـد بيان الاسطوانة بالرسم تـكون عمومية ومهما اجراؤها مهـما كان جنس المنحنى الدليل الذى يفرض للاسـطوانة ولنفرض أيضا ان المستقيم ($\underset{\text{ا}}{\text{ا}}$ب و $\underset{\text{ا}}{\text{ا}}$بَ) هو المستقيم الذى ينبغى لراسم الاسطوانة أن يكون موازيا له على الدوام فى أثناء اتـكائه على الدليل اـحـع

ولاجل بيان الاسطوانة بالرسم على مستويى المسـقط نبحث عن محيطيها الظاهريين على هذين المستويين ونبتدئ بالبحث عن محيطها الظاهرى على المسـتوى الافقى فنقول ان هذا المحيط الظاهرى بموجب بـ١٣٩د هو الخط الجامع لنقط تماس جميع المستويات المماسة للاسطوانة المعلومة التى تـكون رأسـية ومما ثبت فى بـ١٣٢د يعـلم أن كل مستو من تلك المسـتويات الرأسـية يشتمل على راسم من رواسم الاسطوانة ويكون أثره الافقى هو عين المسقط الافقى لهذا الراسم ويفهم من ذلك ان هذا الاثر يكون مستقيمـا موازيا الى $\underset{\text{ا}}{\text{ا}}$ب ومن جهـة أخرى حيث ان هذا المسـتوى ممـاس للاسطوانة بطول الراسم المذكور فيكون حينئذ أثره الافقى مماسا القاعدة الاسطوانة وهى المنحنى اـحـع لاننا لو رسمنا من نقطة تقابل راسم التمـاس بالقاعدة مستقيما مماسا لها لـكان هذا المستقيم موجودا فى مستويها وهو المسـتوى الافقى للمسقط وفى المسـتوى المماس للاسطوانة وبما انه لا يوجد مستقيم مشترك بين هذين المستويين سوى الاثر الافقى للمـستوى المماس المذكور فيعلم حينئذ أن هذا الاثر يلزم أن يكون مماسا القاعدة الاسطوانة وبناء على

ماذكر اذا رسم لهذه القاعدة المماسان اب ، حء موازيين الى ا ب كان هذان المماسان عبارة عن الاثرين الافقيين لمستويين رأسيين مماسين للاسطوانة بطول الراسمين المسقطين أفقيا على اب ، حء وعليه فيكون المسقطان الرأسيان لهما عبارة عن المستقيمين اَبَ ، حَءَ المرسومين بالتوازي الى اَبَ ومن ثم يعلم أن المستقيمين (اب ، اَبَ) ، (حء ، حَءَ) هما المحيط الظاهري للاسطوانة على المستوى الافقي وكل راسم من سطحها وجد تحت هذين المستقيمين أعني من الرواسم المتلاقية مع القاعدة في نصف الدائرة احح يكون غير مشاهد في المسقط الافقي

وأما المحيط الظاهري للاسطوانة على المستوى الرأسي فانه يتحصل طبقا لما في بـ ١٣٩ د بواسطة المستويين المماسين لها والعموديين على المستوى الرأسي المذكور ولا يخفى أن الاثرين الافقيين لهذين المستويين يكونان عموديين على خط الارض ومماسين للقاعدة اءحح وبناء عليه فيكون هذان الاثران هما ءءَ ، ححَ ومن حيث ان هذين المستويين يمسان بالضرورة الاسطوانة بطول راسميها الخارجين من نقطتي التماس ء ، ح اللذين ينسقطان بالطبيعة على (ءف ، ءَفَ) ، (حه ، حَهَ) فيكون هذان الراسمان هما محيطها الظاهري على المستوى الرأسي للمسقط بحيث ان كل راسم من سطح الاسطوانة وجد خلف هذين الراسمين أعني من الرواسم الخارجة من نصف الدائرة ءاح يكون غير مشاهد في المسقط الرأسي

ومن هنا يتضح ان رواسم الاسطوانة منقسمة الى أربعة أقسام من حيثية الظاهر منها والمخبأ على مستويي المسقط كما يستدل على ذلك من أقسام القاعدة فأولا الرواسم الخارجة من القوس اء ظاهرة في الافقي مخبأة في الرأسي وثانيا الرواسم الخارجة من القوس حح فانها عكس الاولى أعني مخبأة المسقط الافقي ظاهرة الرأسي وثالثا الرواسم الخارجة من القوس ءح فانها ظاهرة المسقطين ورابعا الرواسم الخارجة من القوس ح ا فانها عكس المتقدمة أي أنها مخبأة المسقطين معا ولا شك أن هذا هو مصداق لما تقدم في أواخر بـ ١٤٠ د

بـ ١٤٣ د ولنرجع الآن لحل المسألة التي نحن بصددها فنفرض أن م هي المسقط الافقي للنقطة المعلومة على سطح الاسطوانة التي يراد منها رسم المستوى المماس لتلك الاسطوانة ونقول ان هذا المسقط الوحيد كاف لتعيين النقطة الفراغية المذكورة

لانه

لانه حيث كانت تلك النقطة موجودة على سطح الاسطوانة فيمكن تعيين مسقطها الرأسى بواسطة المسقط الافقى لها ولذلك يقال لابد وان يمر بهذه النقطة راسم من رواسم الاسطوانة وهذا الراسم ينسقط أفقيا على م ل الموازى الى ا ب وبما أن المستقيم م ل متلاق مع القاعدة فى نقطة ل فتكون اذن هذه النقطة اثرا افقيا لهذا الراسم وعليه فيكون مسقطه الرأسى عبارة عن المستقيم لَ رَ الموازى الى اَ بَ فيلزم حينئذ للحصول على المسقط الرأسى لنقطة م ان يقام منها عمود على خط الارض ويمد حتى يتلاقى مع لَ رَ فى نقطة مَ التى تكون بالضرورة مسقطا رأسيا للنقطة المذكورة ومع ذلك فهناك حل آخر لانه لما كان المستقيم م ل ملاقيا القاعدة فى نقطتين مثل ل , ع فيمكن ان يقال ان نقطة ع هى أيضا أثر أفقى لراسم ثان من رواسم الاسطوانة منسقط كذلك على م ع لكن مسقطه الرأسى هو عَ رَ بحيث لو مد العمود م مَ حتى يتلاقى مع عَ رَ فى نقطة مثل مً لرأينا انه يوجد على الاسطوانة نقطة ثانية هى (م , مً) متحدة المسقط الافقى مع نقطة (م , مَ) الاولى اذ ان كليهما منسقط أفقيا على نقطة م الوحيدة

بند ١٤٤ اذا تقرر هذا وعلمنا أن هناك نقطتين على سطح الاسطوانة منسقطتين أفقيا على نقطة م رأينا ان للمسئلة الاصلية حلان لنبدأ بأحدهما فنقول اذا اردنا أن نرسم من نقطة (م , مَ) الاولى مستويا مماسا للاسطوانة يقال لاشك ان هذا المستوى يشتمل على الراسم (م ل , مَ لَ) المار بتلك النقطة وبناء عليه يكون الاثر الافقى لذلك المستوى مارا من الاثر الافقى ل لهذا الراسم ثم ولكون المستوى المذكور مماسا للاسطوانة بطول هذا الراسم فلاشك انه يشتمل على المستقيم المماس للقاعدة فى نقطة ل أعنى المستقيم ل ص ويكون هذا المستقيم أثرا أفقيا له أى للمستوى المماس المطلوب ولاجل الحصول على أثره الثانى يبحث عن الاثر الرأسى للمستقيم (م ل , مَ لَ) الموجود فى هذا المستوى فيوجد أنه هو نقطة رَ وعليه فيكون المستقيم ص رَ هو الاثر الراسى للمستوى المماس المطلوب لكن اذا وقعت نقطة تقاطع الاثر الافقى ط ص بخط الارض خارجا عن حد الرسم يتصور بنقطة (م , مَ) مرور مستقيم مساعد مواز الى الاثر الافقى ل ص فيكون مسقطه الافقى م س موازيا الى ص ل ومسقطه الرأسى مَ سَ موازيا الى خط الارض فلو بحثنا عن الاثر الرأسى سَ لهذا المستقيم كانت هذه النقطة أيضا من نقط الاثر الرأسى للمستوى المماس وعليه فيكون سَ رَ هو هذا

الاثر وعلى كلا الحالات فان هذه العملية يصح استعمالها دائما لاجل التحقيق
وأما المستوى المماس للاسطوانة فى نقطة (م و مَ) فانه يتعين بملاحظة أن راسم التماس يكون منسقطا فى هذه الحالة أفقيا على م ق وراسيا على مَ قَ وحينئذ فلو رسم من الاثر ق لهذا الرسم مستقيم مثل ق لا مماس لقاعدة الاسطوانة كان هذا المماس أثرا أفقيا للمستوى المماس الجديد ويتعين أثره الرأسى لا زَ كما تقدم بالبحث عن نقطة زَ التى يتلاقى فيها راسم التماس مع المستوى الرأسى للسقط وان لزم الحال يستعان بالافقى المار بنقطة (م و مَ) الذى تتعين بواسطته نقطة ثالثة من الاثر المذكور

بـ ١٤٥ د ينبغى ان يلاحظ انه حيث كان المستويان المماسان ط ص ر و ط لا ر اللذان قد عيناهما آنفا مشتملين على راسمين من رواسم الاسطوانة وكان هذان الراسمان متوازيين من خاصية توازى جميع رواسم الاسطوانة فينبغى حينئذ ان يكون خط تقاطع المستويين المماسين المذكورين مستقيما موازيا لرواسم الاسطوانة وبناء على ذلك اذا عينا بموجب ما تقدم خط تقاطع هذين المستويين وكان هو (ط ر و طَ رَ) لزم ان يكون هذا المستقيم موازيا بالضبط الى (ا ب و اَ بَ) وهذا تحقيق آخر للاعمال الرسمية

بـ ١٤٦ د بناء على الاسباب المندرجة فى بـ ١٤١ د يلزمنا فقط البحث عن أثرات المستويات المماسة بدون ان نعتبر ان هذه المستويات موجودة وجودا حقيقيا لكن عيان لهذه الاثرات وجودا فينبغى حينئذ ان نبين أجزاءها المختبأة بمسقطى الاسطوانة على المستوى الافقى والمستوى الرأسى بخطوط نقطية وأما رواسم الاسطوانة المتنوعة فانه كان يمكننا ان نبين الذى استعملناه منها للمساعدة على ايجاد المستويات المماسة بخطوط مجزئة طبقا للاصطلاح الذى اصطلحنا عليه قبل لكننا قد فرضنا اعتبار جميع هذه المستقيمات كعدة رواسم موجودة على الاسطوانة وجودا حقيقيا لاجل أن مجموع هذه الرواسم يبين لنا جيدا هيئة السطح ومن ثم وجب علينا بيان هذه الرواسم بخطوط كاملة ان كانت مشاهدة أو نقطية ان كانت غير مشاهدة ومعرفة المشاهد والغير المشاهد منها راجع لما تقدم فى بـ ٤٠ د وفى بـ ١٤٢ د

بـ ١٤٧ د اذا أريد تعيين المنحنى الذى تنفذ فيه الاسطوانة من المستوى الرأسى للسقط فيكفى لذلك أن يبحث عن الاثرات الرأسية لرواسم هذا السطح المتنوعة فيتحصل بذلك خط مثل قَ زَ ى هَ زَ تَ وهذا الخط يكون فى مثالنا هذا قطعا ناقصا ومماسا للاثرين الرأسيين

الرأسيين من المستويين المماسين فى نقطتى ك و كَ لان هذين المستويين يشتملان على جميع المستقيمات المماسة للمنحنيات المرسومة على سطح الاسطوانة من جميع نقط راسم تماس كل منهما ولاجل الحصول على أعلا نقطة واوطى نقطة من المنحنى فَ كَ ءَ هَ ... يكفى أن نعين الراسمين الخارجين من نقطتى ع و عَ اللتين مماس القاعدة فى كل منهما يكون موازيا الى خط الارض لان المستوى المماس للاسطوانة فى كل واحد من هذين الراسمين يقطع المستوى الرأسى فى مستقيم موازلخط الارض أعنى أفقيا فمثلا المستوى المماس بطول الراسم (ع ش و عَ شَ) يقطع المستوى الرأسى فى مستقيم أفقى يكون بالضرورة مماسا للمنحنى فَ كَ ءَ هَ ... وعليه فتكون نقطة شَ هى أعلا نقطة لان المماس للمنحنى فيها أفقى وبمثل ذلك تكون نقطة شَ هى أوطى نقطة ويجب أن يلاحظ ان هذه النتيجة تكون صحيحة مهما كانت الاسطوانة المعلومة حيثما اتفق حتى ولو لم تكن قاعدتها دائرة

بند ١٤٨ المطلوب مد مستو مماس لاسطوانة ومار بنقطة خارجة عن سطحها لذلك نفرض أن الاسطوانة المعلومة هى نفس الاسطوانة المبينة فى (شكل ٨٧ لوحه ٢٠) وان النقطة المعينة فى الفراغ هى نقطة (ه و هَ) ونرسم من هذه النقطة مستقيما مثل (ه ط و هَ طَ) موازيا لرواسم الاسطوانة المعلومة فيكون بالضرورة هذا المستقيم موجودا بأكمله فى المستوى المماس الذى نبحث عنه لان المستوى المذكور مهما كان وضعه لابد وأن يكون مشتملا على أحد رواسم الاسطوانة وبما أن المستقيم (ه ط و هَ طَ) مرسوم من نقطة (ه و هَ) التى يراد تمرير المستوى المماس بها وموازا الى مستقيم موجود فى ذلك المستوى المماس وهو راسم التماس فيكون المستقيم (ه ط و هَ طَ) موجودا فى المستوى المماس المطلوب وبناء عليه اذا بحث عن الاثر الافقى ط لهذا المستقيم علمت لنا نقطة من أثر المستوى المماس المطلوب وبما أن هذا الاثر يجب أن يكون مماسا القاعدة الاسطوانة طبقا لما تقدم فى بند ١٣٢ فلا جرم أن يكون هو أحد المماسين ط ص , ط ع لا اللذين لا يمكن أن يرسم للقاعدة من نقطة ط مماسات سواهما ومن ذلك يظهر أن هناك مستويين يحلان المسئلة ويمكن تعيين أثريهما الرأسيين بالسهولة لان كلا هذين المستويين مشتمل على المستقيم (ط ه و طَ هَ) وعلى الراسم المخرج من احدى نقطتى التماس ل أو ع فبالضرورة

يكون الاثران الرأسيان المطلوبان مارين بالاثرات الرأسية لهذه المستقيمات واذن فيكون أحدهما هو ر ر َ والثانى ر َ ر َ وفضلا عن ذلك فانه يمكن أن يستعان على تعيين هذين الاثرين أو على تحقيقهما ان كانا معينين بتمرير مستقيم أفقى من نقطة (ه و ه َ) موجود فى المستوى الذى يرام تعيين أو تحقيق أثره الرأسى من المستويين المذكورين كما فعل هذا فى بند ١٤٤ و يبحث عن الاثر الرأسى لهذا الافقى

(تنبيه) اعلم أن السبب فى وقوع نقطتى التماس ل و ع على مستقيم واحد موازا الى ا ب فى مسألتنا هذه ما هو الا لكوننا استعملنا الشكل المسألة الماضية لكن متى أخذت نقطة (ه و ه َ) بالاختيار المطلق فان هذه الحالة لا تحصل دائما وبالجملة فان ذلك لا يغير شيأ من البراهين والاجرا آت التى استعملناها فى حل المسألة الحالية

بند ١٤٩ المطلوب رسم مستو مماس لاسطوانة وموازلمستقيم معلوم

لنفرض أن الدائرة ا ب ص د ح (شكل ٨٨ لوحه ٢٠) الموجودة فى المستوى الافقى للمسقط هى قاعدة الاسطوانة المعلومة وان المستقيم (ب ف و ب َ ف َ) أحد رواسمها ثم نبحث عن محيطيها الظاهريين على المستويين الثابتين كما عمل ذلك فى بند ١٤٢ ثم بعد ذلك نقول اذا فرضنا أن المستقيم الفراغى المعلوم الذى يراد جعل المستوى المماس المطلوب موازيا له هو المستقيم (م ه و م َ ه َ) فيؤخذ على هذا المستقيم نقطة اختيارية ولتكن نقطة (م و م َ) التى هى أثره الرأسى و يمرر بها مستقيم مثل (م ا و م َ ا َ) مواز لرواسم الاسطوانة ثم يمرر بهذين المستقيمين مستو فيكون أثره الافقى بالضرورة هو المستقيم ا ه ومن المعلوم أن هذا المستوى يلزم أن يكون موازيا للمستوى المماس المطلوب لان هذا المستوى المماس يشتمل بالطبيعة على رواسم من رواسم الاسطوانة و بناء على ذلك يكون موازيا لكل من المستقيمين (م ا و م َ ا َ) و (م ه و م َ ه َ) الموجودين فى المستوى الذى أثره الافقى هو ا ه وحيث اتضح لنا توازى المستوى المماس المطلوب الى المستوى ا ه فيكون بالضرورة الاثر الافقى للمستوى المماس المذكور عبارة عن أحد المستقيمين ص ع و ط س المماسين للقاعدة والموازيين الى ا ه واذن فيكون لهذه المسئلة حلان أيضا و يتعين الاثران الرأسيان لهذين المستويين مع السهولة بمساعدة راسم التماس (ص ر و ص َ ر َ) للمستوى الاول وراسم التماس (ط ل و ط َ ل َ) للمستوى الثانى و بما ان المستويين

المماسين

المماسين فى الحالة الراهنة متوازيان يلزم أن يكون اثراهما الرأسيان متوازيين أيضا بينهما يتبع مما تقدم أنه اذا كانت الاسطوانة التى يراد بيانها بالرسم على مستوى المسقط قائمة وقاعدتها فى المستوى الافقى فيكفى لاجل أن تصير تلك الاسطوانة معينة معلومية قاعدتها فقط لان الرواسم يكون اتجاهها فى هذه الحالة معينا بما أنها تكون كلها عمودية على المستوى الافقى وذلك مبنى على خاصية الاسطوانة القائمة فان الاسطوانة القائمة تعرف بأنها هى الاسطوانة التى تكون رواسمها عمودية على مستوى قاعدتها فاذا تقرر هذا وفرض أن المطلوب بيان الاسطوانة القائمة التى قاعدتها هى الدائرة ا ب ح ء هـ و (شكل ٨٩ لوحه ١٣) المعتبرة فى المستوى الافقى للمسقط بطريقة المساقط يقال ان المحيط الظاهرى لتلك الاسطوانة على المستوى الافقى هو فى هذه الحالة نفس القاعدة ا ب ح ء هـ و لان الاسطوانة المماسة للسطح والعمودية على المستوى الافقى التى بها يتعين المحيط الظاهرى تؤل فى هذه الحالة الى نفس الاسطوانة القائمة المعلومة وأما المحيط الظاهرى لها على المستوى الرأسى فلاجل تحديده تحصر الاسطوانة بين مستويين مماسين لها وعموديين على المستوى الرأسى للمسقط وفى هذه الحالة يكون هذان المستويان عموديين على المستوى الافقى للمسقط أيضا لكونهما مشتملين على مستقيمين عموديين على المستوى المذكور وهما راسما تماسهما بالاسطوانة واذن يكون أحد المستويين المذكورين هو المستوى ا ا َ الذى أثراه على مستقيم واحد عمودى على خط الارض ومماس للقاعدة وأثرا المستوى الثانى على مستقيم هـ هـَ المماس لها أيضا وعمودى على خط الارض ولكون المسقطين الرأسيين لراسمى تماس هذين المستويين بالاسطوانة منطبقين على الاثرين الرأسيين ا ا َ و هـ هـَ فيكون هذان المستقيمان هما المحيط الظاهرى للاسطوانة على المستوى الرأسى ولو فرضنا ان الاسطوانة محدودة من الاعلا بدائرة موازية للمستوى الافقى تنسقط أفقيا على ا ب ح ء هـ و ورأسيا على المستقيم اَ هـَ الموازى لخط الارض فيكون المحيط الظاهرى للاسطوانة على المستوى الرأسى عبارة عن المستطيل ا هـ هـَ اَ

فلو أردنا ان نرسم مستويا مماسا لتلك الاسطوانة من النقطة المسقطة أفقيا على ء لكفى ان نرسم من المسقط ء مستقيم ء لم مماسا للقاعدة فيكون هو الاثر الافقى للمستوى المماس المطلوب ولكون المستوى المذكور يلزم ان يكون عموديا على المستوى الافقى لمروره براسم من رواسم الاسطوانة فيكون أثره الرأسى عبارة عن م ن العمودى على خط الارض .

وأما اذا رسم المستوى المماس للاسطوانة فى احدى نقط الراسم الخارج من نقطة و كان المستوى المذكور موازيا الى المستوى الرأسى للمسقط وليس له بناء على ذلك أثر رأسى وانما أثره الافقى هو المستقيم ولك الموازى لخط الارض وخط تقاطع هذا المستوى مع المستوى ءم‌ه يلزم أن يكون رأسيا لانه على ماثبت فى به ١٤٥ د يلزم ان يكون موازيا لرواسم الاسطوانة فهو منسقط افقيا حينئذ على نقطة ل محل تقاطع الاثرين الافقيين للمستويين المماسين ورأسيا على المستقيم لَ لً العمودى على خط الارض

به ١٥١ د وبالعكس اذا فرضنا ان الاسطوانة القائمة المعلومة قاعدتها موجودة فى المستوى الرأسى وكانت دائرة مثل اَ بَ حَ ءَ هَ وَ جَ (شكل ٩٠ لوحه ٢١) كانت نفس تلك الدائرة محيطا ظاهريا للاسطوانة المعلومة على المستوى الرأسى ومحيطها الظاهرى على المستوى الافقى هو المستطيل اه‌هٍ اِ ويكون المستوى المماس للاسطوانة فى أى نقطة من سطحها عموديا على المستوى الرأسى فأثره الرأسى هو المماس للدائرة اَ بَ حَ ءَ ... فى المسقط الرأسى لنقطة التماس وأثره الافقى مستقيم عمودى على خط الارض وذلك كالمستوى ثم‌ه وأيضا المستوى لَ حَ ع المماس للاسطوانة فى النقطة المنسقطة رأسيا على حَ يكون موازيا للمستوى الافقى وليس له أثر أفقى ومتقاطع مع المستوى ثم‌ه فى المستقيم (لَ د لِ) العمودى على المستوى الرأسى

به ١٥٢ د فى الاحوال المتقدمة جميعها قد فرضنا دائما أن قاعدة الاسطوانة موجودة فى احد مستويى المسقط والآن نقول اذا كان دليل الاسطوانة المعلومة منحنيا موجودا فى الفراغ كالدائرة (اب حد ... و اَ حَ) (شكل ٩١ لوحه ٢١) الكائنة فى مستو أفقى مرتفع عن المستوى الافقى للمسقط ولذلك انسقطت أفقيا على دائرة مساوية لها ورأسيا على المستقيم اَ حَ الموازى لخط الارض فيكون محيطها الظاهرى على المستوى الافقى مركبا من المماسين هب , وو الموازيين الى المسقط الافقى هِ بِ للمستقيم المبين لاتجاه رواسم الاسطوانة ثم من نصف الدائرة ب ع حد وأما المحيط الظاهرى على المستوى الرأسى فانه يتعين برسم المماسين اَ اَ , حَ حَ العموديين على خط الارض ومد المستقيمين اَ غَ , حَ طَ من نقطتى اَ , حَ الموازيين الى هَ بِ ويكون حينئذ هذا المحيط الظاهرى مركبا من المستقيمين اَ غَ , حَ طَ ومن المستقيم اَ حَ الذى هو المسقط الرأسى لدليل الاسطوانة

فاذا

فاذا أريد رسم المستوى المماس لهذه الاسطوانة من النقطة المسقطة أفقيا على م كان لذلك طريقتان الاولى ان يتصور امتداد الاسطوانة المعلومة من جهة قاعدتها الى ان تقطع المستوى الافقى للمسقط فى منحن ويعتبر بعد ذلك هذا المنحنى قاعدة جديدة للاسطوانة فيؤل حينئذ حل المسئلة الى الحل المبين فى بـ١٤٤ـد ويكفى لتعيين خط تقاطع الاسطوانة المعلومة بالمستوى الافقى ان يبحث عن الاثرات الافقية لكافة رواسمها فتتعين عدة نقط مثل أ و ب و ع و حـ ... الخ وتجمع بمنحن مثل أ ب ع حـ ء الذى يكون فى مسئلتنا هذه دائرة مساوية لقاعدة الاسطوانة الاصلية أعنى للدائرة اب ع حـ ء وبتطبيق جميع ما قيل فى بـ١٤٤ـد على الاسطوانة المعلومة باعتبار قاعدتها التى فى المستوى الافقى للمسقط يتعين المستويان ل لا ء و ك ص ط المماسان للاسطوانة فى نقطتى (م و مَ) و(م و مً) ولو مدت الاسطوانة فى اتجاه مضاد للذى مدت نحوه فى الحالة الاولى لقطعت المستوى الرأسى فى منحن يمكن اتخاذه قاعدة لها ونجرى عليه العمل كما أجريناه على القاعدة التى فى المستوى الافقى ولا فرق بين الحالتين

(الطريقة الثانية) يصح أجراء العمل على نفس قاعدة الاسطوانة المعتبرة فى الفراغ ولذلك يرسم من نقطة م مسقط نقطة التماس المعلومة مستقيم مثل م س ع موازا الى هـ ب ثم اسقط نقطتى س و ع وهما نقطتا تقابله بالمسقط الافقى للقاعدة على المستوى الرأسى وبعد ايجاد مسقطيهما الرأسيين سَ و عَ يرسم منهما المسقطان الرأسيان عَ قَ و سَ وَ للراسمين المسقطين أفقيا على م س ع ثم يقام العمود م مَ م الذى به يتعين المسقطان الرأسيان مَ و مً لنقطتى التماس المشتركتين فى المسقط الافقى م ثم لاجل تعيين المستوى المماس للاسطوانة فى احدى هاتين النقطتين يرسم مستقيم مماس للقاعدة (ا حـ و حَ اَ) فى نقطة تقابل الراسم المار بالنقطة المذكورة مع القاعدة ونعين مسقطى هذا المماس ثم يلاحظ بمقتضى بـ١٤٤ـد ان هذا المماس يوجد فى المستوى المماس المطلوب وبناء عليه فباتحاد هذا المماس مع راسم التماس يمكن تعيين المستوى المماس للاسطوانة لانه هو المستوى المار بهما وحيث ان هذه العملية سهلة جدا فلا نلتفت لبيانها فى الشكل بالرسم خوفا من تكثير الخطوط الذى ينبنى عليه ارتباك الشكل وصعوبة فهم أجزائه

(تنبيه) اذا كانت قاعدة الاسطوانة منحنيا غير الدائرة سواء كانت في المستوى الافقي أو في الفراغ وعموما مهما كان وضع تلك القاعدة وشكلها ومهما كان اتجاه رواسم الاسطوانة فالعمل واحد لا يختلف عما تقدم الا ببعض تغيرات يسيرة يقتضيها تغير الوضع وأما نفس طريقة الاجراء فانها عمومية لا تغيير فيها

بند ١٥٣ تنبيه قبل قفل باب الكلام على مسائل تماس الاسطوانات بالمستويات ينبغي ان نلاحظ انه لا يمكن أن يكلف المستوى بان يكون مماسا السطح من هذه السطوح اعني السطوح الاسطوانية بشرط أن يمر بمستقيم معلوم لانا قد رأينا في بند ١٣٢ ان المستوى المماس لسطح اسطواني في نقطة يمسه في طول الراسم المار بتلك النقطة ويفهم من ذلك أن شرط تماس الاسطوانة بمستو في نقطة واحدة يشتمل في باطن الامر على شرطين لان راسم التماس يكفي لتحديده نقطتان فكان المستوى المماس مجبور بحسب خاصيته على أن يستوفي شرطين ولو لم يكلف الا بشرط واحد فاذا أضفت على شرط تماسه للاسطوانة شرطا آخر وهو مروره بمستقيم معلوم ولا يخفى ان هذا الشرط مشتمل على شرطين أيضا فكاننا كلفنا المستوى بان يمر من أربع نقط مع أنه معلوم ان ثلاث نقط تكفي لتمريره في العادة وحينئذ فالشرط الرابع زائد والمسئلة تكون مستحيلة الحل لكن اذا كان المستقيم المعلوم موازيا لرواسم الاسطوانة فتكون المسئلة ممكنة الحل وتؤول الى مسئلة بند ١٤٨ لان مرور المستوى المماس بالمستقيم الخارج عن الاسطوانة لم يكن في هذه الحالة الا كمروره بنقطة واحدة خارجة عنها وبيان ذلك انك لو أخذت على المستقيم المعلوم نقطة وحيدة ورسمت مستويا مماسا للاسطوانة ومارا بتلك النقطة لرأيت ان هذا المستوى يمر من طبيعته بكامل المستقيم المذكور لانه مار بنقطة موجودة في المستوى المذكور وموازي لمستقيم موجود فيه وهو راسم التماس

بند ١٥٤ المعلوم نقطة على سطح المخروط والمطلوب مد مستو مماس له منها

ليكن المنحنى ا ب ى (شكل ٩٢ لوحه ٢٢) المعتبر في المستوى الافقي هو دليل المخروط ولتكن نقطة (س ، سَ) رأسه فنبتدئ أولا بالبحث عن المحيط الظاهري لهذا السطح على المستوى الافقي ولذلك نبحث بمقتضى بند ١٣٩ عن جميع المستويات المماسة له التي تكون عمودية على المستوى الافقي للمسقط ومن حيث ان الاثر الافقي لكل مستو من هذه المستويات يكون متحدا مع المسقط الافقي لراسم تماسه بالمخروط فهذا يدل على ان الاثر الافقي المذكور يكون مارا بنقطة س وأيضا من حيث ان

هذا

هذا الاثر يكون مماسا للقاعدة لانه تقدم فى بـ١٣٤ـد أن المستوى المماس للمخروط يمسه بطول راسم من رواسمه فيؤخذ حينئذ من ذلك ان المماسين س ا و س ب المرسومين من نقطة س هما الاثران الافقيان للمستويين المماسين للمخروط والعموديين على المستوى الافقى وهما يمسان هذا المخروط بطول راسميه (س ا و سَ اَ) , (س ب و سَ بَ) وهذان الراسمان هما المحيط الظاهرى للمخروط على المستوى الافقى بحيث ان كل راسم وجد تحتهما أعنى كل راسم من الرواسم التى تخرج من الجزء ا ب من القاعدة يكون غير مشاهد على المستوى الافقى وكل راسم يخرج من القوس الباقى من القاعدة يكون بعكس ذلك أعنى مشاهدا عليه

وأما المحيط الظاهرى على المستوى الرأسى فانه يحصل طبقا لما علم فى بـ١٣٩ـد بالبحث من المستويات المماسة للمخروط التى تكون عمودية على المستوى الرأسى للمسقط وبناء على ذلك فالاثرات الافقية لهذه المستويات يلزم أن تكون عمودية على خط الارض ومماسة بمقتضى بـ١٣٤ـد للقاعدة ا ث ب ى واذن فالمماسان ث ثَ و ى ىَ يكونان هما الاثرين الافقيين للمستويين الممكن رسمهما مماسين للمخروطين وعموديين على المستوى الرأسى وأثراهما الرأسيان يمران بالضرورة بنقطة سَ أعنى المسقط الرأسى لرأس المخروط ويكونان هما ثَ سَ و ىَ سَ ومن حيث ان هذين المستويين يمسان المخروط بطول الراسمين (ث س و ثَ سَ) و (ى س و ىَ سَ) يؤخذ من ذلك ان هذين المستقيمين هما المحيط الظاهرى للسطح منسقطا على المستوى الرأسى وبناء عليه فكل راسم وجد خلف هذين المستقيمين أعنى من الرواسم الخارجة من القوس ث ا ى يكون غير مشاهد فى المسقط الرأسى وبالعكس جميع الرواسم التى توجد امامهما تكون مشاهدة المسقط الرأسى

بـ١٥٥ـد ولنرجع الآن لحل مسئلتنا الاصلية فنفرض ان نقطة م هى المسقط الافقى للنقطة المعلومة ولا يخفى انه لا ينبغى اتخاذ مسقطها الرأسى مجانا أى بالاختيار لانه حيث كانت هذه النقطة موجودة على سطح المخروط فلابد أن تكون موجودة على راسم من رواسمه وهذا الراسم يلزم أن ينسقط أفقيا على س م وهذا المستقيم يمكن أن يعتبر أثره الافقى فى نقطة هـ أو فى نقطة ح فيكون مسقطه الرأسى هو سَ هَ أو سَ حَ فاذا أسقطت نقطة م عليهما بعمود على خط الارض تحصل للنقطة المعلومة حلان احدهما (م و مَ) والثانى (م و مً)

بـ١٥٦د (شكل ٩٢ لوحه ٢٢) اذا تقرر هذا فلنبحث عن المستوى المماس للمخروط في نقطة (م و مَ) الاولى ونقول ان هذا المستوى يشتمل بالضرورة على الراسم (س هـ و سَ هَ) ويمس المخروط بطول ذلك الراسم طبقا لما في بـ١٣٤د وبناء على ذلك يكون الاثر الافقي لهذا المستوى عبارة عن المستقيم ط هـ ع المماس للقاعدة وأما أثره الرأسي فانه يمر بنقطة (ف و فَ) التي يتقابل فيها راسم التماس مع المستوى الرأسي للمسقط ثم بنقطة ع التي هي نقطة تقابل الاثر الافقي ط هـ بخط الارض لكن من حيث ان نقطة ع هذه وقعت في شكلنا هذا خارجا عن حدود الرسم فلاجل استعواضها بنقطة أخرى من الاثر الرأسي للمستوى يتوهم مرور مستقيم أفقي في المستوى المماس المطلوب من نقطة (م و مَ) وليكن (م ص و مَ صَ) هو هذا الافقي فيقابل المستوى الرأسي في نقطة صَ وتكون تلك النقطة نقطة ثانية جديدة من الاثر الرأسي ع صَ فَ للمستوى المطلوب

ويعمل ذلك بعين المستوى المماس لسطح المخروط في نقطة (م و مَ) الثانية بان يقال ان راسم التماس يكون في هذه الحالة عبارة عن المستقيم (س حـ و سَ حَ) وعلى هذا يكون المماس ح ع للقاعدة هو الاثر الافقي للمستوى المماس الجديد ولاجل تعيين أثره الرأسي ع قَ يبحث عن نقطة قَ التي هي نقطة تقابل راسم التماس (ح س و حَ سَ) بالمستوى الرأسي أو يستعان كما تقدم بالافقي (م ص و مَ صَ) الكائن في المستوى المماس الذي نحن بصدد تعيينه

بـ١٥٧د ينبغي ان يلاحظ أنه لداعي اشتمال كل واحد من المستويين المماسين اللذين قد تعينا آنفا على راسم من رواسم المخروط فكل منهما يمر حينئذ برأس المخروط (س و سَ) ومن ذلك ينتج أنه اذا بحث عن خط تقاطع هذين المستويين وهو المسقط أفقيا على ط س ورأسيا على طَ سَ فمن الضروري ان يمر المستقيم الاول بنقطة س والثاني بنقطة سَ وهذا فيه تحقيق للاعمال المتقدمة وفضلا عن ذلك ينبغي أن يكون الاثران الرأسيان لهذين المستويين مماسين لمنحني تقاطع المخروط بالمستوى الرأسي في نقطتي فَ و قَ وهذا المنحني يتعين بالبحث عن الاثرات الرأسية لكافة رواسم المخروط وتجمع بمنحن

بـ١٥٨د المطلوب مد مستوى مماس لسطح المخروط من نقطة معلومة خارجا عنه (شكل ٩٣ لوحه ٢٢) ليكن الخط ا ث ب هو قاعدة المخروط ولتكن نقطة

(س

(س و سَ) رأسه فيبحث كما تقدم عن الخيطين الظاهريين للسطح على مستويي المسقط ويفرض ان نقطة (ۀ و ۀَ) هي النقطة المعلومة في الفراغ التي يراد جعل المستوى المماس المطلوب مارا منها ومن حيث ان المستوى المماس المطلوب لابد أن يشتمل على راسم من المخروط فهو يمر حينئذ برأسه (س و سَ) وبناء على ذلك يشتمل هذا المستوى المماس على المستقيم (س ۀ و سَ ۀَ) وحينئذ فلو بحثنا عن الاثر الافقي (ط و طَ) لهذا المستقيم ورسم منه المماسان ط هـ ح و ط ح ع للقاعدة كان هذان المستقيمان اثرين افقيين للمستويين المماسين الموفيين لمنطوق المسئلة وأما اثراهما الرأسيان فانهما يتعينان بواسطة المستقيم (س ۀ و سَ ۀَ) الموجود في كلا المستويين المطلوبين أو بمساعدة راسمي تماس هذين المستويين وهما الراسمان (س هـ و سَ هـَ) و (س ح و سَ حَ) وكان يمكن أيضا ان يستعمل مستقيم افقي مساعد يمر من نقطة (ۀ و ۀَ) في كل واحد من المستويين كما أجرينا ذلك جملة مرار

بـ ١٥٩ـد المطلوب ايجاد مستو يكون مماسا لمخروط معلوم وموازيا لمستقيم معلوم أيضا

(شكل ٩٣ لوحة ٢٢) اذا حفظنا المعالم المتقدمة على حالها وفرضنا أن (م ۀ و مَ ۀَ) هو المستقيم الذي يراد جعل المستوى المماس موازيا له وقلنا من حيث ان هذا المستوى يلزم ان يمر برأس المخروط فلو رسم من هذه النقطة مستقيم مثل (س ط و سَ طَ) موازي الى (م ۀ و مَ ۀَ) لكان المستقيم المرسوم هكذا موجودا في المستوى المطلوب وبناء على ذلك فالاثر الافقي (ط و طَ) لهذا المستقيم يكون نقطة من الاثر الافقي للمستوى المماس وحينئذ فالاثر الافقي للمستوى المماس المذكور لم يكن سوى احد المستقيمين ط هـ ح و ط ح ع المرسومين من نقطة ط مماسين للقاعدة ومن هنا يعلم ان لهذه المسئلة حلان أيضا ويعين الاثران الراسيان لهذين المستويين كما في البند السابق

بـ ١٦٠ـد من حيث ان كل مستو مماس لمخروط في نقطة من سطحه يمس هذا المخروط في طول راسم من رواسمه كما يؤخذ ذلك من بـ ١٣٤ـد فالتنبيه الذي اشرنا اليه في بـ ١٥٣ـد ينطبق هنا على الحالة الراهنة ومنه ينتج انه لا يمكن ان يكلف المستوى بان يكون مماسا لمخروط ومارا في آن واحد بمستقيم أو بنقطتين معلومتين أيضا مالم يكن المستقيم المعلوم أو المستقيم الواصل بين النقطتين المعلومتين مارا من طبيعته برأس المخروط لان ذلك

ممـا يصير المسئلة شبيهة بالحالة التي لم يكن فيهـا سوى نقطة واحدة خارجة عن المخروط ويراد تمرير المستوى المماس بهـا كما رأينا ذلك في بـ ١٥٨ ـد

(تنبيه) قبل أن نتمم هذا الفصل نرى أنه من النافع ان نضيف اليه بعض مسائل تطبيقية على ما تقدم ونبين للطالب طرق حلها على وجه الاختصار بدون أن نعمل عنها الرسم اللازم ونكلف المجتهدين من التلامذة بأن يعملوا بأنفسهم الرسومات التي تحل بها تلك المسائل

بـ ١٦١ ـد المعلوم نقطة والمطلوب ان يمد منهـا مستو يصنع مع المستوى الافقي زاوية معينة مثل ا

لذلك تؤخذ بالاختيار نقطة على المستقيم المعلوم وينزل منها مستقيم عمودي على المستوى الافقي ومستقيم آخر مائل عليه بشرط أن يكون هذا المستقيم المائل موازيا الى المستوى الرأسي للمسقط وأن يكون مسقطه الرأسي صانعا مع خط الارض زاوية مساوية الى ا وحينئذ اذا تصورنا ان هذا المائل يدور حول المستقيم الرأسي فانه يولد مخروطا قائمـا أثره على المستوى الافقي دائرة يمكن تعيينها بسهولة ورواسم هذا المخروط تكون كلها مائلة على الافق بمقدار زاوية تساوي ا وبناء على ذلك اذا رسمنا مستويا مماسا لهذا المخروط ومارا بالمستقيم المعلوم ولا يخفى ان ذلك ممكن اذ المستقيم المعلوم مار برأس المخروط فالمستوى المماس المتحصل هكذا هو بالضرورة المستوى الموفي للشروط المقررة في منطوق المسئلة

بـ ١٦٢ ـد المطلوب رسم مستو مماس لاسطوانة معلومة بشرط ان يكون مائلا على المستوى الافقي بزاوية قدرها معين يرمز لها بحرف ا

لذلك يرسم كما في المسئلة المتقدمة مخروط تحركي رواسمه مائلة على المستوى الافقي بقدر ا ثم بعد ذلك لو مدمن رأس المخروط مستقيم موازا الى رواسم الاسطوانة ومر بهذا المستقيم مستو مماس للمخروط السابق علينا سوى أن نرسم مستويا مماسا للاسطوانة المعلومة بشرط ان يكون موازيا الى المستوى المماس للمخروط الذي صار تعيينه وهي مسئلة تحل كما في بـ ١٤٩ ـد برسم مستقيم مماس لقاعدة الاسطوانة وموازلاثر الافقي من المستوى المماس للمخروط فيكون هو أثر المستوى الموفي لمنطوق المسئلة ويتعين أثره الرأسي كما مر انما يجب التنبيه على ان هذه المسئلة قد تكون مستحيلة الحل وذلك في حالة ما يكون المستقيم الممدود من رأس المخروط المساعد بالتوازي لرواسم الاسطوانة ملاقيا المستوى الافقي في نقطة داخل قاعدته المستديرة

(نتيجة)

(نتيجة) اذا أريد حل نفس هذه المسئلة على مخروط معين ذى قاعدة حيثما اتفق لزم تنويع الحل بأن تجعل رأس المخروط المعلوم رأسا للمخروط التحركى المساعد ثم بعد ذلك يرسم مستقيم مماس مشترك لقاعدتى المخروطين فيكون هو الاثر الافقى للمستوى المطلوب

(مسائل للحل)

بـ١٦٣ د المطلوب مد مستقيم مماس لمخروط معلوم من نقطة معلومة بشرط ان يكون موازيا لمستو معين

المطلوب رسم مستو مماس لاسطوانة معلومة أو لمخروط معلوم بشرط ان يكون عموديا على مستو معلوم

المعلوم مسقطا محور اسطوانة تحركية وطول نصف قطرها والمطلوب ايجاد أثرها على المستوى الافقى ومحيطها الظاهريين (أثر الاسطوانة على مستو ما هو خط تقاطعها بذلك المستوى)

(فى تتمة حل الزاوية المجسمة الثلاثية)

بـ١٦٤ د قد نبهنا فى بـ٨٩ د على ان الثلاث حالات الاخيرة من الست حالات المتعلقة بحل الزاوية المجسمة الثلاثية المندرجة فى بـ٧٨ د وان كان يتيسر حلها باستعمال الزاوية المكملة وتؤل بذلك الى الثلاث حالات الاول لكن قلنا انه يمكن حل هذه الثلاث حالات الاخيرة بحلول قائمة بنفسها ووعدنا أنه من بعد تنهو الكلام على المستويات المماسة للسطوح المنحنية نعود لتتميم حل تلك الثلاث حالات والآن حيث قد سنحت لنا الفرصة وآن أوان الكلام على ذلك فنقول

بـ١٦٥ د الحالة الرابعة ــ المعلوم زاويتان زوجيتان مثل ا , ب من زاوية مجسمة ثلاثية ووجه مقابل لاحدهما كالوجه ب والمطلوب ايجاد الاشياء الباقية

(شكل ٩٤ لوحه ٢٣) لنتخذ مستوى الوجه ج المجهول مستويا افقيا للمسقط ونرسم فيه منطبق الوجه المعلوم ب وليكن هذا المنطبق هو ا س حَ وبعد ذلك نمرر مستويا رأسيا مثل ةَ هو ف عموديا على س ا ونرسم فيه الزاوية ءَ هـ ى مساوية للزاوية الزوجية ا المعلومة من منطوق المسئلة وحينئذ فلو دورنا الوجه ا س حَ حول ا س الى أن يأتى فى المستوى س هـ ءَ لانتقلت نقطة ء الى ءَ التى تنسقط أفقيا فى نقطة ء ثم لاجل تركيب الزاوية المجسمة لم يبق سوى ان نمرر بالحرف (س ء , هـ ءَ) مستو

يكون صانعامع المستوى الافقى زاوية مساوية للزاوية الزوجية ب ولذلك يعد في المستوى الرأسي هف مستقيم مثل دَف بحيث يصنع الزاوية دَف ى=ب ثم بعد ان يتوهم دوران هذا المستقيم حول الرأسي ىَى ليولد مخروطا متحركا قاعدته هى الدائرة ىف يرسم مستو مماس لهذا المخروط ومار بالحرف (س ى , هىَ) فيكون أثر هذا المستوى هو المستقيم س ح ب الممدود من نقطة س مماسا للدائرة التى نصف قطرها ىف وهذا الاثر هو الحرف الثالث من الزاوية المجسمة التى نحن بصددها وبه يتحدد الوجه ا س ب = ح وأما الوجه الثالث ا المنطبق هنا على ب س حً فمن المشاهد بالسهولة أنه يتحصل بأن يؤخذ على العمود ىح طول مثل حىً مساو للراسم دَف من المخروط المماس له هذا الوجه

بند ١٦٦ (الحالة الخامسة) المعلوم من الزاوية المجسمة الثلاثية زاويتان زوجيتان مثل ا , ب والوجه المنحصر بينهما ح والمطلوب ايجاد الاجزاء الباقية

(شكل ٥٩ لوحه ٢٣) لحل هذه المسئلة ترسم على المستوى الافقى زاوية مثل ا س ب = ح لتدل على الوجه المعلوم ثم نمرر مستويا رأسيا مثل هف عموديا على الحرف س ا ونرسم فيه زاوية نَهف مساوية للزاوية الزوجية ا وبمثل ذلك ترسم زاوية حَك ح=ب في مستو عمودى على الحرف س ب وحينئذ فالمستويان س هنَ , س ك حَ يكونان هما مستويا الوجهين المجهولين من المجسمة الثلاثية ولاجل الحصول على نقطة ثانية مثل ى من المسقط س ى ح لفاصلهما المشترك يكفى ان يقطعا بمستو افقى واحد مأخوذ بالاختيار وبناء على ذلك يؤخذ الارتفاع هشَ مساويا للارتفاع لكَ لَ ثم بعد ذلك لو رسم المستقيمان شَ فَ , لَ حَ موازيين على التناظر لخطى الارض هف , ك ح تحصل خطا التقاطع الافقيان وهما فَى , حَى اللذان يعطيان بتقاطعهما نقطة ى التى يبحث عنها وأخيرا لاجل تطبيق الوجهين المتقاطعين فى خط س ى ح يؤخذ العمود مىً = هنَ والعمود ه ىً = لحَ وعليه فتكون حقيقة هذين الوجهين هى المبينة بالزاويتين ا س حً , ب س حً وذلك بفرض ان الوجهين المذكورين قد دارا حول حرفى س ا , س ب حتى انطبقا على المستوى الافقى

بند ١٦٧ (الحالة السادسة) المعلوم من الزاوية المجسمة الثلاثية زواياها الزوجية الثلاث

وهى

وهى ا و ب و حـ والمطلوب ايجاد الثلاثة وجوه

(شكل ٩٦ لوحه ٢٣) لحل هذه المسئلة نعتبر أولا ان المستوى الافقى للمسقط هو مستوى الوجه المجهول حـ ونرسم فيه المستقيم الاختيارى ءا ونعتبر انه أحد حرفى الوجه المذكور ثم نأخذ مستويا رأسيا عموديا على ءا ونرسم فيه زاوية ضَ ا ص مساوية للزاوية الزوجية المعلومة ا وبناء على ذلك يكون مستوى ضَ ا ء هو مستوى الوجه ب ثم تنتخب نقطة مثل تَ بالاختيار داخل الزاوية ضَ ا ص وينزل منها العمودان تَ و و تَ ى على الوجهين حـ و ب ونرسم زاوية تَ ف و = ب وزاوية تَ ع ى = حـ وحينئذ فلو دورنا هاتين الزاويتين حول المحورين تَ و و تَ ى لتولد عنهما مخروطان محركيان ويكون بداهة الوجه المجهول ا مماسا لهما بحيث قد آلت المسئلة الى رسم مستو يمس فى آن واحد كلا من المخروطين المذكورين اللذين رأسهما المشترك هى نقطة تَ وقاعدتاهما الدائرتان المرسومتان بنصفى القطرين و ف و ى ع ولاجل حل هذه المسئلة الفرعية حلا سهلا يبحث عن الاثر الافقى للمخروط الثانى ى تَ ع ويرسم مماس مشترك لهذا الاثر المنحنى وللدائرة التى نصف قطرها و ف انما لكون أثر المخروط يتعين نقطة فنقطة وبالضرورة يكون رسمه تقريبيا فتجنبا لهذا الرسم التقريبى يستعان على الحل بمساعدة الاعتبارات الآتية

نرسم داخل المخروط تَ و ف كرة مماسة له فى طول الدائرة الافقية م ف ء وللحصول على مركز هذه الكرة يرسم المستقيم فَ ع العمودى على سطح هذا المخروط فى نقطة ف ثم ولايجاد كرة أخرى مساوية للاولى ومرسومة داخل المخروط الثانى تَ ى ع أعنى مماسة له من الداخل ينبغى أن يقام على المستقيم تَ ع العمود تَ شَ = ع ف ويتمم متوازى الاضلاع تَ شَ ك ع الذى به يتعين المركز ع للكرة الجديدة ونصف قطرها ع ك اذا تقرر هذا فلنتصور اسطوانة مماسة لهاتين الكرتين معا فتمسهما بالضرورة فى دائرتين عظيمتين عموديتين على محورها وهو المستقيم ع ع ومن حيث ان المستوى الذى يمس المخروطين معا يلزم بالضرورة أن يكون مماسا للكرتين فى آن واحد فحينئذ يجب أن يكون مماسا أيضا للاسطوانة الحالية وعليه فتؤل المسئلة الى أن يرسم من نقطة تَ مستو مماس لهذا السطح الاسطوانى المفرد

وبناء على ذلك فالطريقة السهلة هي أن يرسم في المستوى حَ عَ العمودي على المحور قَ حَ
دائرة بنصف قطر مساوا الى حَ ف ثم يرسم لهذه الدائرة مستقيم مماس لها من نقطة تقابل
هذا المستوى بالمستقيم المرسوم من نقطة تَ موازيا الى المحور وكل ذلك كان يمكن
اجراؤه في الانطباق على المستوى الافقي لكن توجد أيضا طريقة أقصر من ذلك بكثير
وفي الواقع حيث يجب أن يكون المستوى المطلوب مماسا في آن واحد لكل من
الاسطوانة والكرة حَ والمخروط تَ ف و فنقطة تماسه بالكرة المذكورة يلزم أن تكون
موجودة أولا على الدائرة الافقية م ف ه التي هي منحنى تماس الكرة بالمخروط وثانيا
على الدائرة العظيمة الموجودة في المستوى حَ عَ التي هي منحنى تماس الكرة المذكورة
بالاسطوانة وبما أن هاتين الدائرتين متقاطعتان بالضرورة في وتر مسقط رأسيا في
نقطة مَ ووضعه الحقيقي مبين على المستوى الافقي بالمستقيم م مَ ه فحينئذ تكون
نقطة م هي نقطة التماس والمستقيم س م س هو الاثر الافقي للمستوى المماس المطلوب
وأثره الرأسي الذي يجب أن يمر بالرأس تَ يكون بناء على ذلك عبارة عن المستقيم
ب تَ حَ

وحينئذ فمن حيث علم لنا مقدار حقيقة الوجه الافقي وهي ا س ب = ح وعلم أيضا
المسقط س ح للحرف الذي يتقاطع فيه المستويان س ا حَ و س ب حَ فلم يبق علينا
سوى أن نطبق هذين المستويين الاخيرين حول محوري الدوران ا س و ب س
فيتحصل بالسهولة الوجه ا س حَ = ب والوجه ب س حَ = ا وليلاحظ ان الحرف
المنطبق على س حَ ينبغي أن يكون مماسا للدائرة المرسومة من نقطة تَ بنصف قطر
مساوا الى تَ حَ لان هذه الدائرة هي قاعدة المخروط الثاني تَ تَ حَ الذي يمسه المستوى
س ب حَ أيضا

الى هنا انتهى الجزء الاول من كتاب البراعة المشرقية في علم الهندسة الوصفية وهو المقدار
الذي تقرر تدريسه لتلامذة التجهيزية قبل انتقالهم لمدرسة المهندسخانه وذلك بناء
على ما قرره مجلس التحسينات للمدرسة المذكورة في احدى جلساته ويليه الجزء الثاني
وأوله الباب الثالث في المستويات المماسة للسطوح التحركية
وفي السطوح القابلة للانبساط والسطوح الحاصرة

وكان تمام طبعه مع أطلس الرسومات المتعلقة به في يوم السبت الخامس عشر من شهر جمادي الاولى سنة ١٣٠٠ هجرية في ظل من تعطرت بثنائه الافواه وبلغ من كل وصف جميل منتهاه خديوينا المعظم محمد باشا توفيق أدام الله بقاءه وانجاله الكرام وذلك في عهد نظارة الوزير الافخم والامير الاعظم سعادة احمد خيري باشا أبقى الله طيب حياته وأدام كمال المعارف بحسن عناياته بمطبعة ديوان عموم المعارف مباشرا بعالي همة حضرة ملاحظها النجيب حسين افندي صبري وبتصحيح حضرات مصححي المطبعة ومشاركة حضرة مؤلفه الالمعي الكامل والجهبذ الفاضل صابر افندي صبري لهم في ذلك والحمد لله على التمام وعلى رسوله أفضل الصلاة وأتم السلام

آمين

(فهرست الجزء الاول من كتاب البراعة المشرقية فى علم الهندسة الوصفية)

(الباب الاول)

(فى الخطوط المستقيمة والمستويات)

صحيفة

(الباب الثانى)

(فى الخطوط المنحنية والسطوح وطرق تولدها والمستويات المماسة لها)